Lösungen - Taylorreihen und Potenzreihen

Klasse: Studium 1 Semester

Lösung zu Aufgabe 1

a) Alle Ableitungen von e^x sind wieder e^x und haben an der Stelle 0 den Wert 1. Deshalb ist der Koeffizient vor x^k einfach $\frac{1}{k!}$: $T_1(x) = 1 + x$ (die Tangente), $T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ und $T_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$.

b) Einsetzen ergibt $T_3(0{,}5) = 1 + 0{,}5 + 0{,}125 + 0{,}0208333 = 1{,}6458333$. Der Fehler beträgt etwa $1{,}6487213 - 1{,}6458333 \approx 0{,}0029$, also weniger als zwei Promille des genauen Wertes.

c) Die Exponentialfunktion ist ihre eigene Ableitung; deshalb sind alle Ableitungswerte an der Stelle 0 gleich 1, und es bleiben nur die Fakultäten im Nenner übrig.

Lösung zu Aufgabe 2

a) Die Ableitungen wiederholen sich mit der Periode vier: $\cos x$, $-\sin x$, $-\cos x$, $\sin x$, $\cos x$. An der Stelle 0 ergeben sich die Werte $1, 0, -1, 0, 1$.

b) Mit den Werten aus a) und den Fakultäten erhält man $T_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$. Die ungeraden Ableitungen sind in 0 null, weil der Kosinus eine gerade Funktion ist; sein Graph ist symmetrisch zur y-Achse, also auch sein Taylorpolynom.

c) $T_4(0{,}2) = 1 - 0{,}02 + 0{,}0000667 = 0{,}9800667$. Die Abweichung liegt erst in der siebten Nachkommastelle, weil das nächste Glied $\frac{x^6}{720}$ für $x = 0{,}2$ winzig ist.

Lösung zu Aufgabe 3

a) Mit $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ und $f''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}$ erhält man $f(4) = 2$, $f'(4) = \frac{1}{4}$ und $f''(4) = -\frac{1}{32}$. Die Stelle $a = 4$ wird gewählt, weil man dort die Wurzel exakt kennt.

b) $T_2(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{32}\cdot\frac{(x-4)^2}{2} = 2 + \frac{x-4}{4} - \frac{(x-4)^2}{64}$. Der Faktor $\frac{1}{2}$ beim quadratischen Glied stammt aus $2!$.

c) Mit $x - 4 = 0{,}1$: $T_2(4{,}1) = 2 + 0{,}025 - 0{,}00015625 = 2{,}02484375$. Der Fehler beträgt nur etwa $2 \cdot 10^{-6}$, denn der Abstand zur Entwicklungsstelle ist klein.

Lösung zu Aufgabe 4

a) $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f'''(x) = \frac{2}{x^3}$; in 1: $1, -1, 2$. Damit ist $T_3(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3}$, denn $\frac{2}{3!} = \frac{1}{3}$.

b) Mit $x - 1 = 0{,}2$: $0{,}2 - 0{,}02 + 0{,}0026667 = 0{,}1826667$. Die Näherung ist um etwa $0{,}00035$ zu groß.

c) $f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4}$, also $|R_3| = \frac{6}{\xi^4 \cdot 24} \cdot 0{,}2^4 \leq \frac{0{,}0016}{4} = 0{,}0004$ für $\xi \geq 1$. Der tatsächliche Fehler $0{,}00035$ liegt unter dieser Schranke.

Lösung zu Aufgabe 5

a) $\frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{2^{k+1}}{2^k} = 2$, also $\rho = 2$. Es handelt sich um eine geometrische Reihe mit $q = \frac{x}{2}$, die genau für $|x|$ konvergiert.
b) $\frac{k}{k+1} \to 1$, also $\rho = 1$. Der Faktor k ändert den Radius der geometrischen Reihe nicht.
c) $\frac{(k+1)!}{k!} = k + 1 \to \infty$, also $\rho = \infty$: Die Exponentialreihe konvergiert für alle reellen Zahlen.
d) $\frac{k!}{(k+1)!} = \frac{1}{k+1} \to 0$, also $\rho = 0$: Die Reihe konvergiert nur für $x = 0$; die Fakultät wächst schneller als jede Potenz von $\frac{1}{|x|}$.

Lösung zu Aufgabe 6

a) $\rho = 1$. Bei $x = 1$ entsteht die harmonische Reihe (divergent), bei $x = -1$ die alternierende harmonische Reihe (konvergent nach Leibniz). Konvergenzbereich $[-1, 1)$.
b) $\rho = 1$. Bei $x = \pm 1$ ist [redacted], und $\sum \frac{1}{k^2}$ konvergiert; also konvergiert die Reihe an beiden Rändern absolut. Konvergenzbereich $[-1, 1]$.
c) Geometrische Reihe mit $q = \frac{x-2}{3}$: Konvergenz genau für $|x - 2|$. An den Rändern $x = -1$ und $x = 5$ ist $|q| = 1$, die Glieder bilden keine Nullfolge. Konvergenzbereich $(-1, 5)$, Mittelpunkt 2.

Lösung zu Aufgabe 7

a) $10^\circ = \frac{10\pi}{180} \approx 0{,}174533$. Dagegen ist $\sin 10^\circ \approx 0{,}173648$. Die beiden Werte stimmen auf zwei Nachkommastellen überein.
b) $\frac{0{,}000885}{0{,}173648} \approx 0{,}51\,\%$. Für eine Pendeluhr ist das ein spürbarer, aber kleiner Effekt.
c) Wegen $\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{6} + \ldots$ ist der Fehler etwa $\frac{\varphi^3}{6} \approx 0{,}000886$. Das stimmt gut mit dem tatsächlichen Fehler überein.
d) $\frac{\varphi^2}{6}$, das sind etwa 14°. Größere Ausschläge machen die Uhr merklich ungenau.

Lösung zu Aufgabe 8

a) $T_5(0{,}5) = 0{,}5 - \frac{0{,}125}{6} + \frac{0{,}03125}{120} = 0{,}5 - 0{,}0208333 + 0{,}0002604 = 0{,}4794271$.
b) Die Abweichung ist $0{,}4794271 - 0{,}4794255 = 0{,}0000016$. Das Polynom vom Grad fünf liefert also fünf korrekte Nachkommastellen.
c) Da $T_5 = T_6$ (die sechste Ableitung des Sinus ist in 0 null), gilt $|R_6| \leq \frac{|\sin^{(7)}(\xi)|}{7!} 0{,}5^7 \leq \frac{0{,}0078125}{5040} \approx 1{,}55 \cdot 10^{-6}$. Der tatsächliche Fehler liegt knapp darunter.

d) Mit Symmetrien und Additionstheoremen, zum Beispiel $\sin(\pi - x) = \sin x$ und $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$, lässt sich jeder Winkel auf diesen Bereich zurückführen. Dort sind die Argumente klein und das Polynom sehr genau.

Lösung zu Aufgabe 9

a) Mit $u = \frac{s}{R}$: $h \approx R \cdot \frac{s^2}{2R^2} = \frac{s^2}{2R}$. Die Absenkung wächst also quadratisch mit der Entfernung.
b) $h \approx \frac{10^2}{2 \cdot 6371}$ km $\approx 7{,}85$ m. Schon auf zehn Kilometer verschwinden fast acht Meter hinter dem Horizont.
c) $h \approx \frac{30^2}{12742}$ km $\approx 70{,}6$ m, gemessen von Meereshöhe. Ein kleiner Leuchtturm wäre vollständig verdeckt, wenn man selbst auf Meereshöhe stünde.
d) Das Argument $u = \frac{s}{R}$ ist sehr klein ($\frac{10}{6371} \approx 0{,}0016$). Das nächste Glied $\frac{u^4}{24}$ ist dagegen völlig vernachlässigbar.

Lösung zu Aufgabe 10

a) Mit $x = \frac{p}{100}$ ist $\ln(1+x) \approx x$, also $n \approx \frac{\ln 2}{p/100} = \frac{100 \ln 2}{p} \approx \frac{69{,}3}{p}$. Man rundet auf 70, weil sich 70 durch viele Zahlen teilen lässt.
b) Bei $2\,\%$: genau $35{,}00$ Jahre, Regel 35 Jahre. Bei $7\,\%$: genau $10{,}24$ Jahre, Regel 10 Jahre. Die Regel liegt in beiden Fällen sehr nahe am genauen Wert.
c) Das nächste Glied der Reihe $-\frac{x^2}{2}$ wird mit wachsendem x größer; dann ist $\ln(1+x)$ deutlich kleiner als x, und die Regel unterschätzt die Verdopplungszeit. Deshalb benutzt man bei hohen Zinsen eher eine „72er-Regel“.

Lösung zu Aufgabe 11

a) Die Ableitung von $(1-u)^{-1/2}$ ist $\frac{1}{2}(1-u)^{-3/2}$, in 0 gleich $\frac{1}{2}$. Also $(1-u)^{-1/2} \approx 1 + \frac{u}{2}$.
b) Mit $u = \frac{v^2}{c^2}$ folgt $E \approx mc^2\left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right) = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$. Der erste Summand ist die Ruheenergie, der zweite die aus der Schule bekannte kinetische Energie.
c) Genau: $\frac{1}{\sqrt{0{,}99}} \approx 1{,}0050378$. Näherung: $1 + \frac{0{,}01}{2} = 1{,}005$. Der Unterschied liegt in der fünften Nachkommastelle.
d) Für $v \ll c$ ist u winzig und die Näherung ausgezeichnet. Erst bei Geschwindigkeiten, die einen merklichen Bruchteil der Lichtgeschwindigkeit erreichen, muss man relativistisch rechnen, etwa in Teilchenbeschleunigern.

Lösung zu Aufgabe 12

a) Setzt man $t = -\frac{x^2}{2}$ in $e^t = \sum \frac{t^k}{k!}$ ein, erhält man $e^{-x^2/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^k k!}$, gültig für alle x.
b) $\int_0^1 x^{2k}\,dx = \frac{1}{2k+1}$. Da die Reihe überall konvergiert, darf man gliedweise integrieren

und erhält die angegebene Reihe.
c) $1-\frac{1}{6}+\frac{1}{40}-\frac{1}{336}+\frac{1}{3456}\approx 0{,}855646$. Multipliziert mit $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\approx 0{,}398942$ ergibt sich $P\approx 0{,}341354$. Das stimmt bis auf etwa 10^{-5} mit dem Tabellenwert $0{,}34134$ überein.
d) Die Reihe ist alternierend mit fallenden Gliedern. Der Fehler ist höchstens das erste weggelassene Glied $\frac{1}{2^5\cdot 120\cdot 11}\approx 0{,}0000237$.

Lösung zu Aufgabe 13

a) Innerhalb des Konvergenzradius darf gliedweise abgeleitet werden. Die Ableitung von $\frac{1}{1-x}$ ist $\frac{1}{(1-x)^2}$, die von x^k ist kx^{k-1}; der Radius bleibt 1.
b) Mit $x=\frac{1}{2}$: $\sum k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}=\frac{1}{(1/2)^2}=4$. Multiplikation mit $\frac{1}{2}$ liefert $\sum\frac{k}{2^k}=2$.
c) $\int_0^x\frac{dt}{1-t}=-\ln(1-x)$ und $\int_0^x t^k\,dt=\frac{x^{k+1}}{k+1}$. Nach Indexverschiebung entsteht $\sum_{k\geq 1}\frac{x^k}{k}$.
d) $\ln 2=-\ln\frac{1}{2}=\sum\frac{1}{k2^k}\approx 0{,}5+0{,}125+0{,}041667+0{,}015625+0{,}00625=0{,}688542$. Der genaue Wert ist $0{,}693147$; diese Reihe konvergiert viel schneller als die alternierende harmonische Reihe.

Lösung zu Aufgabe 14

a) Bei $x=1$ fallen die Glieder nur wie $\frac{1}{2k+1}$; für sechs Stellen bräuchte man rund eine Million Glieder.
b) $\arctan\frac{1}{5}\approx 0{,}2-0{,}0026667=0{,}1973333$, mit drei Gliedern $0{,}1973973$. $\arctan\frac{1}{239}\approx\frac{1}{239}\approx 0{,}0041841$.
c) Mit zwei Gliedern: $\pi\approx 4\,(4\cdot 0{,}1973333-0{,}0041841)\approx 3{,}14060$. Mit drei Gliedern: $\pi\approx 3{,}14162$; der genaue Wert ist $3{,}14159$.
d) Die Argumente $\frac{1}{5}$ und $\frac{1}{239}$ sind klein; jedes weitere Glied ist um den Faktor $\frac{1}{25}$ bzw. $\frac{1}{239^2}$ kleiner. So gewinnt man pro Glied mehr als eine Dezimalstelle.

Lösung zu Aufgabe 15

a) $e^x-1-x=\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\ldots$; nach Division durch x^2 bleibt $\frac{1}{2}+\frac{x}{6}+\cdots\to\frac{1}{2}$.
b) $x-\sin x=\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{120}+\ldots$; nach Division durch x^3 bleibt $\frac{1}{6}-\cdots\to\frac{1}{6}$.
c) Zähler $\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\ldots$, Nenner $x\left(x-\frac{x^3}{6}+\ldots\right)=x^2-\frac{x^4}{6}+\ldots$. Kürzen durch x^2 ergibt $\frac{1/2-\ldots}{1-\ldots}\to\frac{1}{2}$.
d) $\ln(1+x)-x=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots$; nach Division durch x^2 folgt der Grenzwert $-\frac{1}{2}$.
Man braucht jeweils nur das erste nicht verschwindende Glied.

Lösung zu Aufgabe 16

a) $R_n(1)=\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}\cdot 1^{n+1}$ mit einer Zwischenstelle $\xi\in(0,1)$.

b) Wegen 1 ist das Restglied positiv und kleiner als $\frac{3}{(n+1)!}$.
c) $\frac{3}{10!} \approx 0{,}000000827$ ist noch zu groß, $\frac{3}{11!} \approx 0{,}000000075$ genügt. Also $n = 10$.
d) $\sum_{k=0}^{10} \frac{1}{k!} \approx 2{,}7182818$. Auf sechs Stellen: $e \approx 2{,}718282$.
e) $\frac{e}{2n}$ verlangt $n > 2\,718\,282$, also mehrere Millionen Schritte statt elf Gliedern.

Lösung zu Aufgabe 17

a) $f(0{,}5) = e^{-4} \approx 0{,}0183$, $f(0{,}1) = e^{-100} \approx 3{,}7 \cdot 10^{-44}$. Der Graph ist nahe 0 extrem flach und schmiegt sich an die x-Achse an.
b) Kettenregel: $\left(-\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{2}{x^3}$. In 0: $\frac{f(h)}{h} = \frac{1}{h} e^{-1/h^2} \to 0$, weil die Exponentialfunktion schneller fällt als $\frac{1}{h}$ wächst. Also $f'(0) = 0$.
c) Alle Koeffizienten $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ sind null; die Taylorreihe ist die Nullfunktion. Sie konvergiert für alle x, sogar mit unendlichem Radius.
d) Nur für $x = 0$, denn $f(x) > 0$ für alle $x \neq 0$. Eine konvergente Taylorreihe muss also nicht die Funktion darstellen; man muss das Restglied untersuchen.

Lösung zu Aufgabe 18

a) $y' = \sum_{k \geq 0} (k+1) a_{k+1} x^k$. Koeffizientenvergleich mit $y = \sum a_k x^k$ liefert $(k+1) a_{k+1} = a_k$. Aus $y(0) = 1$ folgt $a_0 = 1$.
b) $a_k = \frac{a_{k-1}}{k} = \cdots = \frac{1}{k!}$. Also $y = \sum \frac{x^k}{k!} = e^x$, wie erwartet.
c) $y'' = \sum (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k$, also $a_{k+2} = -\frac{a_k}{(k+2)(k+1)}$. Mit $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ verschwinden alle geraden Koeffizienten, und $a_3 = -\frac{1}{6}$, $a_5 = \frac{1}{120}$, … Es entsteht die Sinusreihe, also $y = \sin x$.
d) Die gefundenen Reihen haben unendlichen Konvergenzradius. Dort darf man gliedweise ableiten, und die Reihe erfüllt die Gleichung tatsächlich.

Lösung zu Aufgabe 19

a) Mit $q = -x^2$: $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots$.
b) Die geometrische Reihe konvergiert für $|x^2|$, also $\rho = 1$. Bei $x = 1$ entsteht $1 - 1 + 1 - \ldots$; die Glieder bilden keine Nullfolge, die Reihe divergiert.
c) Über $\mathbb{C}$ hat $1 + z^2$ die Nullstellen $\pm i$. Der Konvergenzkreis einer Potenzreihe reicht bis zur nächsten Polstelle, und $\pm i$ hat vom Ursprung den Abstand 1.
d) Der Abstand von 1 zu i ist $|1 - i| = \sqrt{2} \approx 1{,}414$. Also ist der Radius um $a = 1$ gleich $\sqrt{2}$, obwohl auf der reellen Achse nichts Besonderes passiert.

Lösung zu Aufgabe 20

a) $q!\, e = q! \frac{p}{q} = (q-1)!\, p$ ist ganz, und jedes $\frac{q!}{k!}$ mit $k \leq q$ ist ganz. Die Differenz ist daher eine ganze Zahl.
b) Nach der Reihendarstellung ist $e - \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} = \sum_{k>q} \frac{1}{k!}$, und alle Summanden sind

positiv.
c) $\frac{q!}{k!} = \frac{1}{(q+1)(q+2)\cdots k} \leq \frac{1}{(q+1)^{k-q}}$. Die geometrische Reihe ergibt $x \leq \frac{1/(q+1)}{1-1/(q+1)} = \frac{1}{q}$, mit echter Ungleichung ab dem zweiten Glied.
d) x wäre eine ganze Zahl mit 0. Eine solche gibt es nicht. Also war die Annahme falsch, und e ist irrational. □