Lösungen zur Klassenarbeit - Summen, Produkte und vollständige Induktion

Klasse: Studium 1 Semester · Dauer: 60 Minuten · /20

Lösung zu Aufgabe 1 (4 BE/Punkte)

a) $2 \cdot 55 + 10 = 120$ (2 P.).
b) $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$ (2 P.).
In a) zerlegt man die Summe mit der Linearität in $2\sum k$ und $\sum 1$; die Gaußsche Formel liefert 55, die Anzahl der Summanden ist zehn. In b) kürzt sich jeder Zähler mit dem Nenner des vorangehenden Faktors; übrig bleiben der erste Zähler und der letzte Nenner. Ausschreiben der vier Faktoren macht dieses Teleskopprinzip sichtbar.

Lösung zu Aufgabe 2 (5 BE/Punkte)

a) $n = 1$: $1 \cdot 2 = 2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3}$ (1 P.).
b) $\frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$ (4 P.).
Im Induktionsschritt spaltet man den letzten Summanden ab und setzt für die Summe bis n die Induktionsvoraussetzung ein. Dann klammert man $(n+1)(n+2)$ aus und erhält $\frac{(n+1)(n+2)}{3}(n+3)$. Kontrolle für $n = 3$: $2 + 6 + 12 = 20$ und $\frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{3} = 20$. Ohne ausdrücklich genannte Voraussetzung wird der Schritt nicht voll bewertet. Der Induktionsanfang bei $n = 1$ lautet $1 \cdot 2 = 2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3}$ und ist ebenfalls aufzuschreiben, damit die Kette der Schlüsse einen Ausgangspunkt hat.

Lösung zu Aufgabe 3 (4 BE/Punkte)

a) $a^4 - 8a^3b + 24a^2b^2 - 32ab^3 + 16b^4$ (2 P.).
b) $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} = 56$: Anzahl der 3-elementigen Teilmengen einer 8-elementigen Menge (2 P.).
Beim binomischen Satz ist der zweite Summand $-2b$; seine Potenzen bringen abwechselnde Vorzeichen und Zweierpotenzen $1, 2, 4, 8, 16$. Die Koeffizienten $1, 4, 6, 4, 1$ stammen aus der vierten Zeile des Pascalschen Dreiecks. In b) kürzt man vor dem Ausmultiplizieren und deutet das Ergebnis kombinatorisch als Zahl der Auswahlen ohne Reihenfolge.

Lösung zu Aufgabe 4 (4 BE/Punkte)

a) $\sum_{k=1}^{15} (20 + 2(k-1))$ (1 P.).
b) $15 \cdot 20 + 2 \cdot \frac{14 \cdot 15}{2} = 300 + 210 = 510$ Plätze (3 P.).
Die Platzzahlen der Reihen bilden eine arithmetische Folge mit dem Startwert zwanzig und der Differenz zwei. Beim Summieren trennt man den konstanten Anteil von dem wachsenden Anteil und verwendet die Gaußsche Summenformel für $0 + 1 + \cdots + 14$. Kontrolle: Die letzte Reihe hat 48 Plätze, der Mittelwert aus erster und letzter Reihe ist

34, und $15 \cdot 34 = 510$.

Lösung zu Aufgabe 5 (3 BE/Punkte)

$n^3 - n = (n-1)n(n+1)$ ist ein Produkt dreier aufeinanderfolgender Zahlen; darunter ist eine gerade und eine durch 3 teilbare (3 P.).
Die Zerlegung $n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n-1)n(n+1)$ zeigt drei aufeinanderfolgende ganze Zahlen. Unter zwei aufeinanderfolgenden Zahlen ist eine gerade, unter dreien eine durch drei teilbar; da zwei und drei teilerfremd sind, ist das Produkt durch sechs teilbar. Alternativ gelingt ein Induktionsbeweis mit $(n+1)^3 - (n+1) = n^3 - n + 3n(n+1)$. Probe: $4^3 - 4 = 60 = 6 \cdot 10$. Auch $n = 1$ passt: 0 ist durch sechs teilbar.