Lernzettel - Summen, Produkte und vollständige Induktion

Klasse: Studium 1 Semester

Einstieg: Reiskörner auf dem Schachbrett

Eine alte Legende erzählt vom Erfinder des Schachspiels, der sich als Belohnung Reis wünschte: ein Korn auf das erste Feld, zwei auf das zweite, vier auf das dritte und auf jedes weitere Feld doppelt so viele wie auf das vorige. Der König hielt den Wunsch für bescheiden. Die Summe $1+2+4+\cdots+2^{63}$ ist aber $2^{64}-1$, rund 18 Trillionen Körner – mehr Reis, als die Menschheit in Jahrhunderten erntet. Um solche Summen kompakt aufzuschreiben, benutzt man das Summenzeichen. Um Formeln wie $\sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 2^n - 1$ für *alle* n zu beweisen, braucht man ein neues Beweisprinzip: die vollständige Induktion, die wie eine Kette umfallender Dominosteine funktioniert.

Summen- und Produktzeichen

Definition: Summen- und Produktzeichen

Lange Summen schreibt man mit dem **Summenzeichen**: $\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$. Die Laufvariable k ist beliebig umbenennbar, m und n sind die Grenzen. Für n ist die Summe leer und hat den Wert 0. Analog ist $\prod_{k=m}^{n} a_k = a_m \cdot a_{m+1} \cdots a_n$ das **Produkt**; das leere Produkt ist 1. Regeln: $\sum (a_k + b_k) = \sum a_k + \sum b_k$, $\sum c\,a_k = c \sum a_k$, und $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{j=m+s}^{n+s} a_{j-s}$ (**Indexverschiebung**). Die **Fakultät** ist $n! = \prod_{k=1}^{n} k$ mit $0! = 1$. Bekannte Summen: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$, und die **geometrische Summe** $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ für $q \neq 1$.

Binomialkoeffizienten und binomischer Satz

Definition: Binomialkoeffizienten und binomischer Satz

Der **Binomialkoeffizient** $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ (gesprochen „n über k“) gibt die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge an. Es gilt $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ und die Pascal-Regel $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$. Daraus ergibt sich das Pascalsche Dreieck. Der **binomische Satz** lautet $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$. Setzt man $a = b = 1$, folgt $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$; mit $a = 1, b = -1$ folgt $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ für $n \geq 1$.

Vollständige Induktion

Definition: Vollständige Induktion

Die vollständige Induktion beweist Aussagen $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$. Sie beruht auf dem Peano-Axiom: Eine Teilmenge von $\mathbb{N}$, die 1 enthält und mit jedem n auch $n+1$, ist ganz $\mathbb{N}$. Ein Induktionsbeweis besteht aus zwei Teilen: **Induktionsanfang**: $A(n_0)$ ist wahr. **Induktionsschritt**: Für beliebiges $n \geq n_0$ gilt: Ist $A(n)$ wahr (*Induktionsvoraussetzung*), so ist auch $A(n+1)$ wahr. Danach ist $A(n)$ für alle $n \geq n_0$ bewiesen. Wie bei Dominosteinen braucht man den ersten Stein (Anfang) und die Garantie, dass jeder Stein den nächsten umwirft (Schritt). Fehlt einer der beiden Teile, ist der Beweis wertlos.

So gehst du vor: Vollständige Induktion

1. Behauptung $A(n)$ und Startwert n_0 festlegen.
2. Induktionsanfang: $A(n_0)$ nachrechnen.
3. Induktionsvoraussetzung: $A(n)$ gelte für ein beliebiges $n \geq n_0$.
4. Induktionsschritt: $A(n+1)$ aufschreiben, die Voraussetzung einsetzen und umformen, bis die Behauptung dasteht.

Beispiel 1 (Summenformel)

Behauptung $A(n)$: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. *Anfang* $n=1$: links 1, rechts $\frac{1\cdot 2}{2} = 1$ ✓. *Schritt*: Gelte $A(n)$. Dann $\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, das ist $A(n+1)$. □

Beispiel 2 (Teilbarkeit)

Behauptung: $7 \mid 8^n - 1$ für alle $n \geq 1$. Anfang: $8 - 1 = 7$ ✓. Schritt: $8^{n+1} - 1 = 8(8^n - 1) + 7$. Nach Voraussetzung ist $8^n - 1$ durch 7 teilbar, ebenso 7; also auch die Summe. □

Beispiel 3 (Ungleichung)

Behauptung: $2^n > n$ für alle $n \geq 1$. Anfang: $2 > 1$. Schritt: $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2n \geq n+1$, da $n \geq 1$. □

Beispiel 4 (Binomischer Satz)

$(x+2)^4 = x^4 + 4x^3 \cdot 2 + 6x^2 \cdot 4 + 4x \cdot 8 + 16 = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$, denn die Koeffizienten $\binom{4}{k}$ sind $1, 4, 6, 4, 1$.

Beispiel 5 (Anfang bei $n_0 > 1$)

Behauptung: $n! > 2^n$ für alle $n \geq 4$. Anfang $n = 4$: $24 > 16$ ✓ (für $n = 1, 2, 3$ ist die Aussage falsch, daher darf der Anfang nicht bei 1 liegen). Schritt: $(n+1)! = (n+1)\,n! > (n+1)\,2^n \geq 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$, denn $n + 1 \geq 5 > 2$. □

Beispiel 6 (Teleskopsumme)

Wegen $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ hebt sich in $\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$ fast alles weg: Es bleibt $1 - \frac{1}{n+1}$. Teleskopsummen sind eine Alternative zur Induktion, wenn man die Summe nicht raten muss.

Variante: starke Induktion

Manchmal braucht der Schritt nicht nur $A(n)$, sondern alle $A(m)$ mit $m \leq n$. Beispiel: Jede natürliche Zahl $n \geq 2$ ist ein Produkt von Primzahlen. Ist n prim, fertig; sonst ist $n = ab$ mit 1, und beide Faktoren sind nach Voraussetzung Produkte von Primzahlen.

Rechnen mit dem Summenzeichen

Das Summenzeichen $\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$ ist eine Abkürzung, mit der man wie mit gewöhnlichen Summen rechnen darf. Der Name des Laufindex ist gleichgültig: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{j=1}^{n} j^2$. Konstante Faktoren darf man herausziehen, Summen gliedweise aufspalten, und man darf die Summe an einer Stelle teilen: $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k$. Besonders wichtig ist die **Indexverschiebung**: Ersetzt man k durch $j + 1$, so ändern sich die Grenzen in Gegenrichtung, $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1}$. Mit ihr bringt man zwei Summen auf denselben Index, um sie zusammenzufassen oder teleskopisch kürzen zu lassen.

Beispiel 7 (Indexverschiebung und Teleskop)

Vereinfachen Sie $\sum_{k=1}^{n} \left((k+1)^2 - k^2\right)$ auf zwei Arten.

Erste Art: $(k+1)^2 - k^2 = 2k + 1$, also $\sum(2k+1) = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n = n^2 + 2n$. Zweite Art: $\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2 - \sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{j=2}^{n+1} j^2 - \sum_{k=1}^{n} k^2 = (n+1)^2 - 1 = n^2 + 2n$. Beide Ergebnisse stimmen überein; nebenbei folgt die Gaußsche Summenformel.

Merke: Die wichtigsten Summenformeln

Summe	Wert
$\sum_{k=1}^{n} k$	$\frac{n(n+1)}{2}$
$\sum_{k=1}^{n} k^2$	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Summe	Wert
$\sum_{k=1}^{n} k^3$	$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
$\sum_{k=0}^{n} q^k \ (q \neq 1)$	$\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$	2^n

Produkte und Fakultäten

Analog zum Summenzeichen schreibt man Produkte mit $\prod_{k=m}^{n} a_k = a_m \cdot a_{m+1} \cdots a_n$. Das wichtigste Produkt ist die Fakultät $n! = \prod_{k=1}^{n} k$ mit der Vereinbarung $0! = 1$ (leeres Produkt). Logarithmieren verwandelt Produkte in Summen: $\ln \prod a_k = \sum \ln a_k$. Auch bei Produkten gibt es ein Teleskopprinzip – Zähler und Nenner aufeinanderfolgender Faktoren kürzen sich.

Beispiel 8 (Teleskopprodukt)

Berechnen Sie $\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.

$1 - \frac{1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k \cdot k}$. Das Produkt ist $\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4} \cdots \frac{(n-1)(n+1)}{n \cdot n}$. Ordnet man die Faktoren als $\frac{1 \cdot 2 \cdots (n-1)}{2 \cdot 3 \cdots n} \cdot \frac{3 \cdot 4 \cdots (n+1)}{2 \cdot 3 \cdots n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n+1}{2}$, erhält man $\frac{n+1}{2n}$. Für $n \to \infty$ strebt das Produkt gegen $\frac{1}{2}$.

Binomialkoeffizienten in der Kombinatorik

Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ zählt die k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge, also die Möglichkeiten, k von n Dingen ohne Beachtung der Reihenfolge auszuwählen. Daraus erklären sich seine Eigenschaften ohne Rechnung: Die **Symmetrie** $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ entsteht, weil die Auswahl der k Elemente zugleich die Auswahl der $n-k$ nicht gewählten ist. Die **Rekursion** $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$, die das Pascalsche Dreieck erzeugt, unterscheidet, ob ein bestimmtes Element dabei ist oder nicht. Und $\sum_k \binom{n}{k} = 2^n$ zählt alle Teilmengen.

Varianten der Induktion

Die Induktion muss nicht bei 1 beginnen: Gilt die Aussage für n_0 und folgt sie aus der für n für alle $n \geq n_0$, so gilt sie für alle $n \geq n_0$. Bei der **starken Induktion** darf man im Induktionsschritt alle Aussagen $A(n_0), \ldots, A(n)$ voraussetzen, nicht nur $A(n)$. Das braucht man etwa für die Zerlegung in Primfaktoren oder für Rekursionen, die auf mehrere Vorgänger zugreifen, wie die Fibonacci-Folge. Viele Formeln, die man vermutet, entstehen durch Ausprobieren kleiner Fälle; die Induktion liefert dann den Beweis.

Satz: Bernoullische Ungleichung

Für alle reellen $x \geq -1$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $(1+x)^n \geq 1+nx$. Beweis durch Induktion: Für $n=1$ gilt Gleichheit. Aus $(1+x)^n \geq 1+nx$ folgt wegen $1+x \geq 0$: $(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$.

Beispiel 9 (Türme von Hanoi)

Beim Spiel „Türme von Hanoi“ sollen n Scheiben unterschiedlicher Größe von einem Stab auf einen anderen umgesetzt werden; es darf nie eine größere auf einer kleineren liegen. Zeigen Sie, dass $T_n = 2^n - 1$ Züge genügen.

Um die größte Scheibe zu bewegen, müssen die $n-1$ kleineren vorher auf den dritten Stab und danach wieder auf sie: $T_n = 2T_{n-1}+1$, $T_1 = 1$. Induktion: $T_1 = 2^1 - 1$. Gilt $T_n = 2^n - 1$, so $T_{n+1} = 2(2^n-1)+1 = 2^{n+1}-1$. Für 64 Scheiben bräuchte man bei einem Zug pro Sekunde rund 585 Milliarden Jahre.

Doppelsummen und Summationsreihenfolge

Summen über zwei Indizes treten bei Tabellen, Matrizen und Wahrscheinlichkeiten auf. Bei einer endlichen Doppelsumme darf man die Reihenfolge vertauschen: $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}$, denn beide Seiten addieren alle Einträge einer Tabelle, einmal zeilenweise und einmal spaltenweise. Hängt die Grenze des inneren Index vom äußeren ab, muss man beim Vertauschen die Grenzen neu bestimmen. Ein Bild der Indexmenge hilft: $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{ij}$ läuft über das Dreieck $1 \leq j \leq i \leq n$, und dasselbe Dreieck wird durch $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} a_{ij}$ beschrieben.

Beispiel 10 (Vertauschen liefert eine Formel)

Berechnen Sie $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} 1$ auf zwei Arten.

Innen zuerst: $\sum_{j=1}^{i} 1 = i$, also $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$. Vertauscht: $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} 1 = \sum_{j=1}^{n}(n-j+1) = n+(n-1)+\cdots+1$. Man erhält dieselbe Summe rückwärts – genau Gauß' Trick, die Summe vorwärts und rückwärts zu addieren.

Rekursiv definierte Folgen

Viele Folgen sind rekursiv gegeben: Man kennt den Anfang und eine Vorschrift, wie man aus einem Glied das nächste berechnet. Die Induktion ist das natürliche Werkzeug, um für solche Folgen eine geschlossene Formel zu beweisen. Typisch ist der Dreischritt: einige Glieder ausrechnen, ein Muster vermuten und die Vermutung durch Induktion bestätigen. So erhält man etwa für $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$ die Werte $1, 4, 9, 16, \ldots$, vermutet $a_n = n^2$ und bestätigt dies mit $n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$. Auch Ungleichungen zwischen Folgengliedern, Schranken und Monotonie zeigt man häufig auf diesem Weg.

Achtung: Typische Fehler bei der Induktion

Der Induktionsanfang darf nie fehlen: Der Schritt $n \to n+1$ für „$n = n+1$“ ist korrekt, die Aussage aber trotzdem falsch. Im Induktionsschritt muss die Induktionsvoraussetzung tatsächlich benutzt werden, sonst ist der Beweis meist ein direkter Beweis oder fehlerhaft. Man darf nicht die Behauptung für $n+1$ voraussetzen und daraus etwas Wahres folgern. Und ein Schritt, der nur für $n \geq 2$ funktioniert, braucht einen Anfang bei $n = 2$ – genau daran scheitert der berühmte Scheinbeweis, dass alle Pferde dieselbe Farbe haben.

Wusstest du? Der kleine Gauß und Pascal

Der neunjährige Carl Friedrich Gauß soll um 1786 in Braunschweig die Zahlen von 1 bis 100 in Sekunden addiert haben, indem er Paare $1+100$, $2+99$, … bildete: $50 \cdot 101 = 5050$. Blaise Pascal formulierte 1654 in seiner Abhandlung über das arithmetische Dreieck als einer der Ersten das Prinzip der vollständigen Induktion ausdrücklich. Das Dreieck selbst war in China und Persien schon Jahrhunderte früher bekannt.

Hinweis: Induktionsbeweise aufschreiben

Gliedern Sie jeden Beweis sichtbar in Induktionsanfang (IA), Induktionsvoraussetzung (IV), Induktionsbehauptung (IB) und Induktionsschritt (IS). Schreiben Sie die Behauptung für $n+1$ zuerst ausdrücklich hin, damit Sie wissen, wohin die Rechnung führen soll. Markieren Sie die Stelle, an der Sie die Voraussetzung einsetzen, etwa mit „$\overset{\text{IV}}{=}$“. Bei Summen spalten Sie den letzten Summanden ab: $\sum_{k=1}^{n+1} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1}$.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Summenzeichen: Faktoren herausziehen, aufspalten, Indexverschiebung $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1}$; Teleskopsummen $\sum (b_{k+1} - b_k) = b_{n+1} - b_1$.
- Summenformeln: $\sum k = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\sum k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$, $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
- Produktzeichen und Fakultät: $n! = \prod_{k=1}^{n} k$, $0! = 1$; Logarithmus macht aus Produkten Summen.
- Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ zählt k-elementige Teilmengen; Symmetrie, Pascal-Rekursion $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$, $\sum_k \binom{n}{k} = 2^n$.
- Binomischer Satz: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.
- Vollständige Induktion: Anfang $A(n_0)$, Schritt $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ für alle $n \geq n_0$; die Voraussetzung muss im Schritt verwendet werden.
- Starke Induktion darf alle Vorgänger benutzen; Bernoulli: $(1+x)^n \geq 1 + nx$ für $x \geq -1$.

Achtung

Häufige Fehler sind ein vergessener Induktionsanfang, ein Induktionsschritt, der die Induktionsvoraussetzung nicht benutzt, und das Verwechseln von n und $n+1$ beim Einsetzen. Beim Summenzeichen werden Grenzen nach einer Indexverschiebung oft nicht angepasst.

Ottos Tipp

Schreiben Sie im Induktionsschritt zuerst die Behauptung $A(n+1)$ vollständig auf, spalten Sie dann den letzten Summanden ab und setzen Sie die Induktionsvoraussetzung ein. Rechnen Sie zum Schluss, bis exakt die Behauptung dasteht.