Arbeitsblatt - Summen, Produkte und vollständige Induktion

Klasse: Studium 1 Semester · 20

Der Rechenweg muss angegeben werden.

Aufgabe 1

Aufgabe 1 – Summen und Produkte ausrechnen

Schreiben Sie die Summen und Produkte aus und berechnen Sie sie.

a) $\sum_{k=1}^{5} k^2$
b) $\sum_{k=0}^{4} 2^k$
c) $\sum_{k=1}^{4} (-1)^k k$
d) $\prod_{k=1}^{5} k$
e) $\prod_{k=1}^{4} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$

Aufgabe 2

Aufgabe 2 – Summen mit dem Summenzeichen schreiben

Schreiben Sie mit dem Summenzeichen und berechnen Sie den Wert.

a) $1 + 3 + 5 + \cdots + 99$
b) $2 + 4 + 8 + \cdots + 1024$
c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{90}$

Aufgabe 3

Aufgabe 3 – Indexverschiebung

Formen Sie mit einer Indexverschiebung um.

a) Berechnen Sie $\sum_{k=3}^{10} (k-2)^2$, indem Sie $j = k - 2$ setzen.
b) Zeigen Sie $\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) = 0$.
c) Zeigen Sie $\sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1$ mit einer Indexverschiebung.

Aufgabe 4

Aufgabe 4 – Summenformeln anwenden

Berechnen Sie mit den Summenformeln.

a) $\sum_{k=1}^{100} k$
b) $\sum_{k=1}^{20} k^2$

c) $\sum_{k=1}^{10} k^3$; vergleichen Sie mit $\left(\sum_{k=1}^{10} k\right)^2$.
d) $\sum_{k=1}^{n}(6k^2 - 2k)$ in faktorisierter Form

Aufgabe 5

Aufgabe 5 – Binomialkoeffizienten

Berechnen Sie und begründen Sie kombinatorisch.

a) $\binom{7}{3}$ und $\binom{10}{8}$
b) $\binom{n}{1}$ und $\binom{n}{2}$
c) Die sechste Zeile des Pascalschen Dreiecks
d) Zeigen Sie $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ durch Rechnen mit Fakultäten.

Aufgabe 6

Aufgabe 6 – Binomischer Satz

Wenden Sie den binomischen Satz an.

a) Multiplizieren Sie $(x+2)^4$ aus.
b) Bestimmen Sie den Koeffizienten von x^3 in $(2x-1)^5$.
c) Nähern Sie $1{,}01^5$ mit den ersten drei Gliedern von $(1+0{,}01)^5$ und vergleichen Sie mit dem genauen Wert $1{,}0510100501$.
d) Zeigen Sie $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$ für $n \geq 1$.

Aufgabe 7

Aufgabe 7 – Orangenpyramiden im Supermarkt

Ein Händler stapelt Orangen zu Pyramiden. Bei einer quadratischen Pyramide liegt oben eine Orange, darunter 2×2, dann 3×3 und so weiter. Bei einer dreieckigen Pyramide liegen in der k-ten Lage von oben $1 + 2 + \cdots + k$ Orangen.

a) Wie viele Orangen hat eine quadratische Pyramide mit 10 Lagen?
b) Wie viele Lagen hat eine quadratische Pyramide mit 140 Orangen?
c) Wie viele Orangen enthält eine dreieckige Pyramide mit 6 Lagen?
d) Zeigen Sie $\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ mit den Summenformeln.

Aufgabe 8

Aufgabe 8 – Sparen für die Ausbildung

Eltern zahlen zu Beginn jedes Jahres 600 € auf ein Sparkonto, das mit $2\,\%$ pro Jahr verzinst wird. Die erste Einzahlung wird also n Jahre verzinst, die letzte ein Jahr.

a) Schreiben Sie den Kontostand nach n Jahren mit dem Summenzeichen.
b) Bestimmen Sie eine geschlossene Formel mit der geometrischen Summenformel.
c) Wie hoch ist der Kontostand nach 18 Jahren? Wie viel davon sind Zinsen?

d) Begründen Sie die geometrische Summenformel $\sum_{k=1}^{n} q^k = q\frac{q^n-1}{q-1}$ durch Induktion.

Aufgabe 9

Aufgabe 9 – Reis auf dem Schachbrett

Auf das k-te Feld eines Schachbretts ($k = 1, \dots, 64$) werden 2^{k-1} Reiskörner gelegt. Ein Reiskorn wiegt etwa $0{,}025$ g; die Welt erntet jährlich rund $5 \cdot 10^8$ Tonnen Reis.

a) Wie viele Körner liegen auf dem letzten Feld und wie viele insgesamt?
b) Beweisen Sie $\sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 2^n - 1$ durch vollständige Induktion.
c) Wie viele Tonnen Reis sind das?
d) Wie viele Jahre Welternte entspricht das ungefähr?

Aufgabe 10

Aufgabe 10 – Spielplan einer Liga

In einer Fußballliga mit n Mannschaften spielt jede Mannschaft gegen jede andere einmal zu Hause und einmal auswärts.

a) Wie viele Paarungen gibt es bei n Mannschaften? Begründen Sie mit einem Binomialkoeffizienten.
b) Wie viele Spiele hat eine Saison der Bundesliga mit 18 Mannschaften? Wie viele Spieltage mit je 9 Spielen sind das?
c) Bei einem Treffen begrüßen sich 30 Personen paarweise mit Handschlag. Wie viele Handschläge gibt es?
d) Beweisen Sie $\sum_{k=1}^{n-1} k = \binom{n}{2}$ kombinatorisch: Die neue Person Nummer $k+1$ begrüßt alle, die schon da sind.

Aufgabe 11

Aufgabe 11 – Pizza mit Zutaten

Eine Pizzeria bietet 10 verschiedene Zutaten an. Eine Pizza kann beliebig viele davon haben (auch keine).

a) Wie viele Pizzen mit genau drei Zutaten gibt es?
b) Wie viele verschiedene Pizzen gibt es insgesamt? Begründen Sie zwei Arten.
c) Wie viele Pizzen haben höchstens drei Zutaten?
d) Wie viele Pizzen mit genau drei Zutaten enthalten Salami?

Aufgabe 12

Aufgabe 12 – Die Türme von Hanoi

Beim Spiel „Türme von Hanoi“ liegen n Scheiben auf einem von drei Stäben, die größte unten. Es darf immer nur eine Scheibe bewegt werden, und nie eine größere auf einer kleineren liegen. T_n sei die minimale Zugzahl.

a) Bestimmen Sie T_1, T_2, T_3 durch Ausprobieren.
b) Begründen Sie die Rekursion $T_n = 2T_{n-1} + 1$.
c) Beweisen Sie $T_n = 2^n - 1$ durch Induktion.
d) Wie lange dauert das Spiel mit 20 Scheiben bei einem Zug pro Sekunde?

Aufgabe 13

Aufgabe 13 – Laufzeiten von Programmen

Programm A braucht für eine Eingabe der Größe n genau n^2 Millisekunden, Programm B 2^n Millisekunden.

a) Vergleichen Sie die Laufzeiten für $n = 1, \dots, 6$ in einer Tabelle.
b) Beweisen Sie $2^n > n^2$ für alle $n \geq 5$ durch Induktion. Verwenden Sie im Schritt $2n + 1$ für $n \geq 3$.
c) Warum gilt die Aussage nicht schon für $n \geq 3$?
d) Wie lange braucht Programm B für $n = 40$?

Aufgabe 14

Aufgabe 14 – Fibonacci-Kaninchen

Die Fibonacci-Zahlen sind $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. In Leonardo von Pisas Modell gibt F_n die Zahl der Kaninchenpaare im n-ten Monat an.

a) Berechnen Sie $F_1, \dots, F_{12}$.
b) Beweisen Sie $\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$ durch Induktion.
c) Prüfen Sie die Formel für $n = 10$.
d) Beweisen Sie $\sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}$.

Aufgabe 15

Aufgabe 15 – Die Summe der Kubikzahlen

Nikomachos von Gerasa bemerkte um 100 n. Chr., dass die Summe der ersten Kubikzahlen stets eine Quadratzahl ist.

n	1	2	3	4	5
$\sum k^3$	1	9	36	100	225
$\sum k$	1	3	6	10	15

a) Formulieren Sie die Vermutung, die die Tabelle nahelegt.
b) Beweisen Sie $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ durch Induktion.
c) Berechnen Sie $11^3 + 12^3 + \dots + 20^3$.
d) Geben Sie eine anschauliche Deutung: $k^3 = k \cdot k^2$ sind k Quadrate mit Seite k, die zusammen einen Winkelhaken des großen Quadrats bilden.

Aufgabe 16

Aufgabe 16 – Teilbarkeit durch Induktion

Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ durch vollständige Induktion.

a) $3 \mid n^3 + 2n$
b) $7 \mid 3^{2n+1} + 2^{n+2}$
c) $8 \mid 3^{2n} - 1$

Aufgabe 17

Aufgabe 17 – Bernoulli und die Zahl e

Die Bernoullische Ungleichung lautet $(1+x)^n \geq 1 + nx$ für $x \geq -1$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Folgern Sie $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2$.
b) Zeigen Sie $1{,}01^{100} \geq 2$ und vergleichen Sie mit dem Taschenrechnerwert.
c) Zeigen Sie $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1 - \frac{1}{n}$.
d) Folgern Sie mit c), dass $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ monoton wachsend ist. Hinweis: $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1}$.

Aufgabe 18

Aufgabe 18 – Briefmarken und starke Induktion

Bei der starken Induktion darf man im Schritt alle kleineren Fälle benutzen.

a) Zeigen Sie: Jeder Betrag von mindestens 8 Cent lässt sich mit 3- und 5-Cent-Marken genau bezahlen. Behandeln Sie $8, 9, 10$ direkt.
b) Warum funktioniert der Schritt $n \to n + 3$?
c) Zeigen Sie, dass 7 Cent nicht möglich sind.
d) Beweisen Sie mit starker Induktion: Jede natürliche Zahl $n \geq 2$ ist ein Produkt von Primzahlen.

Aufgabe 19

Aufgabe 19 – Gleich viele Köpfe wie Zahlen

Eine Münze wird $2n$-mal geworfen. Die Wahrscheinlichkeit, genau n-mal Kopf zu erhalten, ist $p_n = \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n}$. Man kann zeigen, dass $p_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}$ gilt.

a) Berechnen Sie p_1, p_2, p_3 auf beide Arten.
b) Beweisen Sie $p_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}$ durch Induktion. Zeigen Sie dazu $p_{n+1} = p_n \cdot \frac{2n+1}{2n+2}$ aus der Fakultätsdarstellung.
c) Beweisen Sie $p_n \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$ durch Induktion. Im Schritt ist $(2n+1)^2(3n+4) \leq (2n+2)^2(3n+1)$ zu zeigen.
d) Berechnen Sie p_{10} und vergleichen Sie mit der Schranke. Was bedeutet das Ergebnis für 20 Würfe?

Aufgabe 20

Aufgabe 20 – Knobelaufgabe: Ein falscher Beweis und eine schöne Identität

„Satz“: Alle Pferde haben dieselbe Farbe. „Beweis“ durch Induktion über die Anzahl n der Pferde in einer Gruppe: Für $n = 1$ ist das klar. Seien $n + 1$ Pferde gegeben. Nimmt man das erste weg, haben die übrigen n nach Voraussetzung dieselbe Farbe; nimmt man das letzte weg, ebenfalls. Also haben alle dieselbe Farbe.

a) Finden Sie den Fehler. Für welches n versagt der Schritt?

b) Beweisen Sie kombinatorisch $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$: Aus n Frauen und n Männern wird ein Team von n Personen gebildet.

c) Prüfen Sie die Identität für $n = 4$.

d) Beweisen Sie $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$ durch Ableiten von $(1 + x)^n$.