# Lösungen zur Klassenarbeit - Stetigkeit und Grenzwerte von Funktionen

Klasse: Studium 1 Semester · Dauer: 60 Minuten · /20

## Lösung zu Aufgabe 1 (5 BE/Punkte)

a) $\frac{(x-3)(x+2)}{x-3} = x+2 \to 5$ (1 P.).
b) $\frac{5}{2} \cdot \frac{\sin 5x}{5x} \to \frac{5}{2}$ (2 P.).
c) Erweitern: $\frac{4x}{\sqrt{x^2+4x}+x} = \frac{4}{\sqrt{1+4/x}+1} \to 2$ (2 P.).
In a) liefert Einsetzen $\frac{0}{0}$; man faktorisiert den Zähler und kürzt den gemeinsamen Faktor $x-3$. In b) erweitert man zum bekannten Grenzwert $\frac{\sin u}{u} \to 1$ mit $u = 5x$. In c) handelt es sich um $\infty - \infty$; nach Erweitern mit der Summe und Ausklammern von $x$ erhält man einen Bruch, dessen Grenzwert man ablesen kann.

## Lösung zu Aufgabe 2 (4 BE/Punkte)

a) $2a+1 = 4-a \iff a = 1$ (2 P.).
b) Links Steigung $a = 1$, rechts $2x = 4$: nicht differenzierbar (2 P.).
Stetigkeit an der Nahtstelle verlangt, dass linksseitiger Grenzwert, rechtsseitiger Grenzwert und Funktionswert übereinstimmen; daraus folgt eine lineare Gleichung für $a$. Für die Differenzierbarkeit vergleicht man zusätzlich die Steigungen der beiden Teilstücke. Sie sind verschieden, deshalb hat der Graph bei $x = 2$ einen Knick, obwohl er keinen Sprung macht.

## Lösung zu Aufgabe 3 (4 BE/Punkte)

a) $f(-2) = -1$, $f(0) = 1$, $f(1) = -1$, $f(2) = 3$; drei Vorzeichenwechsel (2 P.).
b) $f(0{,}5) = -0{,}375$: $[0;0{,}5]$. $f(0{,}25) \approx 0{,}266$: $[0{,}25;0{,}5]$ (2 P.).
Für den Zwischenwertsatz braucht man eine stetige Funktion und einen Vorzeichenwechsel an den Intervallrändern; Polynome sind überall stetig. Drei Vorzeichenwechsel liefern drei Nullstellen, und mehr kann ein Polynom dritten Grades nicht haben. Bei der Bisektion behält man stets die Hälfte mit Vorzeichenwechsel; nach zwei Schritten ist die Nullstelle auf ein Intervall der Länge $0{,}25$ eingegrenzt.

## Lösung zu Aufgabe 4 (4 BE/Punkte)

a) $20$ °C (1 P.).
b) $T(0) = 80$, $T \to 20$, stetig: Zwischenwertsatz. $60e^{-0{,}05t} = 30 \iff t = 20\ln 2 \approx 13{,}9$ min (3 P.).
Für große Zeiten verschwindet der Exponentialterm, und die Temperatur nähert sich der Raumtemperatur. Weil die Funktion stetig ist und Werte oberhalb und unterhalb von $50$ Grad annimmt, garantiert der Zwischenwertsatz einen passenden Zeitpunkt.

Die Rechnung erfolgt durch Isolieren der Exponentialfunktion und Logarithmieren; Eindeutigkeit folgt aus der strengen Monotonie.

## Lösung zu Aufgabe 5 (3 BE/Punkte)

$x_n = -\frac{1}{n} \to 0$, aber $H(x_n) = 0 \not\to 1 = H(0)$ (3 P.).
Nach dem Folgenkriterium ist eine Funktion an einer Stelle stetig, wenn für jede gegen diese Stelle konvergierende Folge die Funktionswerte gegen den Funktionswert konvergieren. Eine einzige Folge, für die das scheitert, beweist die Unstetigkeit. Die Folge $-\frac{1}{n}$ nähert sich von links, wo die Funktion konstant null ist; der Funktionswert an der Stelle selbst ist aber eins.