Lernzettel - Stetigkeit und Grenzwerte von Funktionen

Klasse: Studium 1 Semester

Einstieg: Der Mönch auf dem Berg

Ein Mönch steigt an einem Morgen um 8 Uhr von seinem Kloster im Tal auf einen Berg und erreicht den Gipfel um 18 Uhr. Am nächsten Tag steigt er um 8 Uhr auf demselben Weg wieder ab und ist um 18 Uhr unten. Gibt es einen Ort, an dem er an beiden Tagen zur selben Uhrzeit war? Die überraschende Antwort lautet: ja, immer – ganz gleich, wie oft er unterwegs rastet oder umkehrt. Stellt man sich zwei Mönche vor, die am selben Tag starten, einer oben, einer unten, müssen sie sich irgendwo begegnen. Mathematisch steckt dahinter der Zwischenwertsatz für stetige Funktionen. Stetigkeit bedeutet anschaulich, dass der Graph keine Sprünge macht; präzise wird der Begriff mit Grenzwerten und der Epsilon-Delta-Sprache.

Grenzwert einer Funktion

Definition: Grenzwert einer Funktion

Sei f auf einer Umgebung von a definiert (in a selbst muss sie es nicht sein). Man schreibt $\lim_{x \to a} f(x) = L$, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x : \; 0$$

Merke

Der Wert $f(a)$ spielt keine Rolle, deshalb die Bedingung 0. Äquivalent dazu ist das **Folgenkriterium**: $f(x_n) \to L$ für *jede* Folge $x_n \to a$ mit $x_n \neq a$. Um die Nichtexistenz zu zeigen, genügen zwei Folgen mit verschiedenen Funktionsgrenzwerten. Man unterscheidet **einseitige Grenzwerte** $\lim_{x \to a^+}$ (von rechts) und $\lim_{x \to a^-}$ (von links). Der Grenzwert existiert genau dann, wenn beide existieren und übereinstimmen. Es gibt auch uneigentliche Grenzwerte ($\pm\infty$) und Grenzwerte für $x \to \pm\infty$. Die Grenzwertsätze gelten wie bei Folgen. Wichtige Grenzwerte: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$, $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Stetigkeit

Definition: Stetigkeit

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist **stetig in** $a \in D$, wenn $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, also wenn gilt $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in D : \; |x - a|$. Sie heißt stetig, wenn sie in allen Punkten von D stetig ist. Äquivalent: $x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a)$ (**Folgenstetigkeit**). Summen, Produkte,

Quotienten (mit Nenner $\neq 0$) und Verkettungen stetiger Funktionen sind stetig. Polynome, rationale Funktionen (auf ihrem Definitionsbereich), $\sin, \cos, \exp, \ln, \sqrt{}$ und $|x|$ sind stetig. Unstetigkeitsstellen: *hebbare Lücke* (Grenzwert existiert, $\neq f(a)$ oder $f(a)$ undefiniert), *Sprung* (einseitige Grenzwerte verschieden), *Pol* (uneigentlicher Grenzwert), *Oszillation* (etwa $\sin \frac{1}{x}$ bei 0).

Zwischenwertsatz und Extremwertsatz

Definition: Zwischenwertsatz und Extremwertsatz

Zwischenwertsatz: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und liegt c zwischen $f(a)$ und $f(b)$, so gibt es $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = c$. Insbesondere hat eine stetige Funktion mit $f(a)$ eine Nullstelle (**Nullstellensatz** von Bolzano). Das Bisektionsverfahren nutzt dies zur Nullstellensuche: Intervall halbieren und die Hälfte mit Vorzeichenwechsel behalten.
Extremwertsatz (Weierstraß): Eine stetige Funktion auf einem *abgeschlossenen, beschränkten* Intervall $[a, b]$ ist beschränkt und nimmt ihr Maximum und Minimum an. Beide Voraussetzungen sind wichtig: $f(x) = \frac{1}{x}$ auf $(0, 1]$ ist unbeschränkt, $f(x) = x$ auf $(0, 1)$ hat kein Maximum. Eine Folgerung: Das Bild eines abgeschlossenen Intervalls unter einer stetigen Funktion ist wieder ein abgeschlossenes Intervall $[m, M]$.

So gehst du vor: Stetigkeit nachweisen

1. Funktionswert $f(a)$ berechnen.
2. Links- und rechtsseitigen Grenzwert bestimmen.
3. Vergleichen: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$?
4. Für Epsilon-Delta: $|f(x) - f(a)|$ durch $C|x - a|$ abschätzen und $\delta = \min\{1, \varepsilon / C\}$ wählen.
5. Nullstellen: Vorzeichenwechsel suchen und Zwischenwertsatz anwenden.

Beispiel 1 (hebbare Lücke)

$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ für $x \neq 2$. Für $x \neq 2$ ist $f(x) = x + 2$, also $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$. Setzt man $f(2) := 4$, wird f stetig fortgesetzt.

Beispiel 2 (Epsilon-Delta)

$f(x) = 3x + 1$ ist stetig in $a = 2$: $|f(x) - f(2)| = 3|x - 2|$ für $|x - 2|$.

Beispiel 3 (Zwischenwertsatz)

$f(x) = x^3 + x - 1$ ist stetig mit $f(0) = -1$. Also gibt es eine Nullstelle in $(0, 1)$. Bisektion: $f(0{,}5) = -0{,}375$, $f(0{,}75) \approx 0{,}172 > 0$, die Nullstelle liegt in $(0{,}5; 0{,}75)$.

Beispiel 4 (Sprung)

$f(x) = \frac{|x|}{x}$ hat bei 0 die einseitigen Grenzwerte $+1$ (rechts) und -1 (links); der Grenzwert existiert nicht, Sprungstelle.

Das Folgenkriterium

Grenzwerte von Funktionen lassen sich auf Grenzwerte von Folgen zurückführen. Es gilt $\lim_{x \to x_0} f(x) = c$ genau dann, wenn für *jede* Folge (x_n) im Definitionsbereich mit $x_n \neq x_0$ und $x_n \to x_0$ gilt: $f(x_n) \to c$. Entsprechend ist f in x_0 stetig, wenn aus $x_n \to x_0$ stets $f(x_n) \to f(x_0)$ folgt – „stetige Funktionen vertauschen mit Grenzwerten“. Das Kriterium ist vor allem nützlich, um zu zeigen, dass ein Grenzwert *nicht* existiert: Man sucht zwei Folgen, die gegen x_0 streben, deren Funktionswerte aber verschiedene Grenzwerte haben.

Beispiel 5 (Eine wild schwingende Funktion)

Zeigen Sie, dass $\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$ nicht existiert, wohl aber $\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x}$.

Für $x_n = \frac{1}{2\pi n}$ ist $\sin \frac{1}{x_n} = \sin(2\pi n) = 0$, für $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$ ist $\sin \frac{1}{y_n} = 1$. Beide Folgen streben gegen 0, die Funktionswerte aber gegen verschiedene Grenzwerte. Dagegen gilt [redacted], also nach dem Einschließungskriterium $\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$.

Wichtige Grenzwerte

Einige Grenzwerte tauchen so oft auf, dass man sie auswendig kennen sollte. Grundlegend ist $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Am Einheitskreis liest man für 0 die Ungleichung $\sin x$ ab; Division durch $\sin x$ und Kehrwertbildung liefern $\cos x$, und das Einschließungskriterium ergibt den Grenzwert 1. Ebenso wichtig sind $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ und $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, die man auch als Ableitungen von e^x und $\ln x$ an den Stellen 0 bzw. 1 lesen kann. Für das Verhalten im Unendlichen gilt: Die Exponentialfunktion wächst schneller als jede Potenz, $\lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$, und der Logarithmus langsamer als jede Potenz, $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$ für $\alpha > 0$. Daraus folgt auch $\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$.

Beispiel 6 (Auf bekannte Grenzwerte zurückführen)

Berechnen Sie $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

Erweitern mit $1 + \cos x$: $\frac{1 - \cos^2 x}{x^2 (1 + \cos x)} = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos x} \to 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Für kleine x gilt also $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ – ein erster Vorgeschmack auf Taylorpolynome.

Arten von Unstetigkeitsstellen

Ist eine Funktion an einer Stelle x_0 nicht stetig, lohnt sich ein genauer Blick auf die einseitigen Grenzwerte $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ und $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$. Daraus ergibt sich eine Einteilung,

die bei Kurvendiskussionen und in der Physik immer wieder gebraucht wird.

Art	einseitige Grenzwerte	Beispiel
hebbar	existieren und sind gleich	$\frac{x^2-1}{x-1}$ bei 1
Sprung	existieren, sind verschieden	$\operatorname{sgn} x$ bei 0
Polstelle	mindestens einer ist $\pm\infty$	$\frac{1}{x}$ bei 0
Oszillation	mindestens einer existiert nicht	$\sin\frac{1}{x}$ bei 0

Nur bei einer hebbaren Unstetigkeit kann man die Funktion durch eine Änderung oder Ergänzung des Funktionswerts stetig machen; man spricht von der **stetigen Fortsetzung**. So wird $\frac{\sin x}{x}$ mit dem Wert 1 an der Stelle 0 zu einer auf ganz $\mathbb{R}$ stetigen Funktion.

Zwischenwertsatz und Bisektionsverfahren

Der Zwischenwertsatz garantiert für stetiges $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, dass jeder Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ angenommen wird. Sein Beweis beruht auf der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ und liefert zugleich ein Rechenverfahren: Man halbiert das Intervall immer wieder und behält die Hälfte, an deren Rändern f verschiedene Vorzeichen hat. Nach n Schritten ist die Nullstelle auf ein Intervall der Länge $\frac{b-a}{2^n}$ eingegrenzt.

So gehst du vor: Bisektionsverfahren

1. Startintervall $[a,b]$ mit $f(a)\cdot f(b)$ wählen; f muss stetig sein.
2. Mittelpunkt $m=\frac{a+b}{2}$ und $f(m)$ berechnen.
3. Ist $f(a)\cdot f(m)$, setze $b=m$, sonst $a=m$.
4. Wiederholen, bis $b-a$ kleiner als die gewünschte Genauigkeit ist. Die Zahl der Schritte ist $n\geq\log_2\frac{b-a}{\varepsilon}$.

Beispiel 7 (Eine Nullstelle eingrenzen)

Zeigen Sie, dass $x^3+x-1=0$ genau eine Lösung hat, und grenzen Sie sie mit drei Bisektionsschritten ein.

$f(x)=x^3+x-1$ ist stetig und streng monoton wachsend, also gibt es höchstens eine Nullstelle. Wegen $f(0)=-1$ und $f(1)=1>0$ liegt eine in $[0,1]$. $f(0{,}5)=-0{,}375$: neues Intervall $[0{,}5;1]$. $f(0{,}75)\approx 0{,}172$: $[0{,}5;0{,}75]$. $f(0{,}625)\approx -0{,}131$: $[0{,}625;0{,}75]$. Die Lösung ist $x\approx 0{,}682$.

Extremwertsatz und gleichmäßige Stetigkeit

Eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen, beschränkten Intervall $[a,b]$ ist beschränkt und nimmt Maximum und Minimum an (Satz von Weierstraß). Beide Voraussetzungen sind wesentlich: $f(x)=x$ hat auf $(0,1)$ kein Maximum, und $f(x)=\frac{1}{x}$ ist

auf $(0, 1]$ unbeschränkt. Eine stärkere Eigenschaft ist die **gleichmäßige Stetigkeit**: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, das an *allen* Stellen zugleich funktioniert. Nach dem Satz von Heine ist jede stetige Funktion auf $[a, b]$ gleichmäßig stetig; auf ganz $\mathbb{R}$ ist zum Beispiel x^2 es nicht. Gilt sogar $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ mit einer festen Konstanten L, heißt f **Lipschitz-stetig**; dann leistet $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$ das Gewünschte.

Beispiel 8 (Das δ hängt von der Stelle ab)

Zeigen Sie, dass $f(x) = \frac{1}{x}$ in jedem $x_0 > 0$ stetig ist, und untersuchen Sie, wie δ von x_0 abhängt.

Es ist [redacted]. Für $|x - x_0|$ gilt $x > \frac{x_0}{2}$, also [redacted]. Mit $\delta = \min\left(\frac{x_0}{2}, \frac{\varepsilon x_0^2}{2}\right)$ folgt die Stetigkeit. Je näher x_0 an 0 liegt, desto kleiner muss δ gewählt werden; ein gemeinsames δ für alle $x_0 > 0$ gibt es nicht. Auf $(0, 1]$ ist $\frac{1}{x}$ daher stetig, aber nicht gleichmäßig stetig.

Satz: Stetige Umkehrfunktionen

Ist $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton auf einem Intervall I, so ist $f(I)$ wieder ein Intervall, $f : I \to f(I)$ bijektiv und die Umkehrfunktion f^{-1} ebenfalls stetig. So erhält man die Stetigkeit von $\sqrt{x}$, $\ln x$ und $\arcsin x$ ohne zusätzliche Rechnung.

Achtung: Typische Fehler

Eine Funktion ist nicht schon dann stetig, wenn man ihren Graphen „ohne Absetzen zeichnen“ kann – der Graph von $x \sin \frac{1}{x}$ ist kaum zu zeichnen und trotzdem stetig, und $\frac{1}{x}$ ist auf ihrem Definitionsbereich stetig, obwohl der Graph aus zwei Ästen besteht. An einer Definitionslücke ist eine Funktion weder stetig noch unstetig, sie ist dort nicht definiert. Der Zwischenwertsatz garantiert eine Nullstelle, sagt aber nichts über ihre Anzahl. Und beim Folgenkriterium genügt eine einzige Folge nicht, um die Existenz eines Grenzwerts zu beweisen.

Wusstest du? Bolzano, Cauchy und die Monsterfunktion

Bernard Bolzano bewies den Zwischenwertsatz 1817 in Prag als einer der Ersten streng; zuvor galt er als anschaulich selbstverständlich. Karl Weierstraß schockierte 1872 die Fachwelt mit einer Funktion, die überall stetig, aber nirgends differenzierbar ist. Ihr Graph ist so zackig wie eine Küstenlinie bei jeder Vergrößerung. Seitdem weiß man, dass Stetigkeit viel schwächer ist als Differenzierbarkeit.

Hinweis: Stetigkeit stückweise definierter Funktionen

Ist eine Funktion abschnittsweise aus stetigen Bausteinen zusammengesetzt, muss man nur die Nahtstellen prüfen. Berechnen Sie dort den linksseitigen Grenzwert, den rechtsseitigen Grenzwert und den Funktionswert. Stimmen alle drei überein, ist die

Funktion stetig; Parameter bestimmt man, indem man diese Gleichheit fordert. Bei zwei Parametern braucht man in der Regel zwei Bedingungen, etwa Stetigkeit an zwei Nahtstellen oder zusätzlich Differenzierbarkeit. Vergessen Sie nicht zu prüfen, ob die einzelnen Bausteine auf ihrem Abschnitt überhaupt definiert sind, zum Beispiel ob ein Nenner dort verschwindet. Eine kleine Skizze der Abschnitte hilft, keine Nahtstelle zu übersehen.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = c$ bedeutet: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ mit $|f(x) - c|$ für 0; gleichwertig über Folgen (Folgenkriterium).
- Stetig in x_0: $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$; Summen, Produkte, Quotienten und Verkettungen stetiger Funktionen sind stetig.
- Wichtige Grenzwerte: $\frac{\sin x}{x} \to 1$, $\frac{e^x - 1}{x} \to 1$, $\frac{\ln(1+x)}{x} \to 1$ für $x \to 0$; e^x wächst schneller als jede Potenz.
- Unstetigkeiten: hebbar (stetig fortsetzbar), Sprung, Polstelle, Oszillation – Einteilung über die einseitigen Grenzwerte.
- Zwischenwertsatz: Stetiges f auf $[a, b]$ nimmt jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an; Bisektion halbiert den Fehler pro Schritt.
- Extremwertsatz: Stetiges f auf $[a, b]$ hat Maximum und Minimum; offene oder unbeschränkte Intervalle reichen nicht.
- Streng monotone stetige Funktionen auf Intervallen haben stetige Umkehrfunktionen; Lipschitz-stetig ⇒ gleichmäßig stetig ⇒ stetig.

Achtung

Häufig wird der Funktionswert $f(a)$ mit dem Grenzwert verwechselt. Auch gilt: Stetigkeit ist eine Eigenschaft in einem Punkt *des Definitionsbereichs*; $\frac{1}{x}$ ist auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig, aber nicht in 0 fortsetzbar. Beim Epsilon-Delta-Beweis muss δ nur von ε (und a) abhängen, nie von x. Beim Zwischenwertsatz wird die Stetigkeit oft nicht geprüft.

Ottos Tipp

Bei Epsilon-Delta-Beweisen mit x^2 zuerst $|x - a|$ fordern, um $|x + a|$ nach oben abzuschätzen, und $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{C}\}$ wählen.