# Arbeitsblatt - Stetigkeit und Grenzwerte von Funktionen

Klasse: Studium 1 Semester · 20

Der Rechenweg muss angegeben werden.

## Aufgabe 1

### Aufgabe 1 – Grenzwerte berechnen

Berechnen Sie die Grenzwerte. Kürzen Sie bei Ausdrücken der Form $\frac{0}{0}$ und klammern Sie im Unendlichen die höchste Potenz aus.

a) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$

b) $\lim_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1}$

c) $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2+1}{2x^2-x}$

d) $\lim_{x \to -\infty} \frac{x+1}{x^2+1}$

## Aufgabe 2

### Aufgabe 2 – Einseitige Grenzwerte

Bestimmen Sie die links- und rechtsseitigen Grenzwerte an der angegebenen Stelle und entscheiden Sie, ob der Grenzwert existiert.

a) $\frac{\lvert x \rvert}{x}$ bei $0$

b) $\frac{1}{x-3}$ bei $3$

c) $\lfloor x \rfloor$ (größte ganze Zahl $\leq x$) bei $2$

d) $e^{1/x}$ bei $0$

## Aufgabe 3

### Aufgabe 3 – Mit bekannten Grenzwerten rechnen

Führen Sie die Grenzwerte für $x \to 0$ auf $\frac{\sin u}{u} \to 1$, $\frac{e^u-1}{u} \to 1$ oder $\frac{\ln(1+u)}{u} \to 1$ zurück.

a) $\lim \frac{\sin 3x}{x}$

b) $\lim \frac{e^{2x}-1}{x}$

c) $\lim \frac{\ln(1+3x)}{x}$

d) $\lim \frac{\tan x}{x}$

## Aufgabe 4

### Aufgabe 4 – Parameter für Stetigkeit

Bestimmen Sie die Parameter so, dass die Funktion auf $\mathbb{R}$ stetig ist.

a) *f(x)=\begin{cases}x^2+a&x*

b) $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} & x \neq 3 \\ c & x = 3 \end{cases}$

c) $h(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ d & x = 0 \end{cases}$

## Aufgabe 5

### Aufgabe 5 – Epsilon-Delta-Beweise

Beweisen Sie die Stetigkeit an der angegebenen Stelle mit der Epsilon-Delta-Definition. Geben Sie $\delta$ in Abhängigkeit von $\varepsilon$ an.

a) $f(x) = 3x + 1$ bei $x_0 = 2$
b) $f(x) = x^2$ bei $x_0 = 1$
c) $f(x) = \sqrt{x}$ bei $x_0 = 4$

## Aufgabe 6

### Aufgabe 6 – Das Folgenkriterium

Verwenden Sie Folgen, um Grenzwerte zu widerlegen oder Unstetigkeit zu zeigen.

a) Zeigen Sie, dass $\lim_{x \to 0} \cos \frac{1}{x}$ nicht existiert.
b) Zeigen Sie $\lim_{x \to 0} x^2 \cos \frac{1}{x} = 0$.
c) Die Dirichlet-Funktion ist $D(x) = 1$ für $x \in \mathbb{Q}$ und $D(x) = 0$ sonst. Zeigen Sie, dass $D$ an keiner Stelle stetig ist.

## Aufgabe 7

### Aufgabe 7 – Gebühren im Parkhaus

Ein Parkhaus berechnet für die erste angefangene Stunde $2{,}00$ € und für jede weitere angefangene Stunde $1{,}50$ €. Der Tageshöchstsatz beträgt $12{,}00$ €. Die Parkdauer $t$ wird in Stunden gemessen $(0)$.

a) Berechnen Sie die Gebühr für $t = 0{,}5$, $t = 1$, $t = 1{,}01$ und $t = 3{,}2$.
b) Ab welcher Parkdauer gilt der Tageshöchstsatz?
c) An welchen Stellen ist die Gebührenfunktion unstetig? Welche Art von Unstetigkeit liegt vor?
d) Ist die Funktion an den Sprungstellen links- oder rechtsseitig stetig? Begründen Sie mit der Formulierung „angefangene Stunde“.

## Aufgabe 8

### Aufgabe 8 – Auf und ab am Berg

Ein Wanderer steigt am Samstag zwischen $8$ und $18$ Uhr vom Tal (Höhe $0$ m) zum Gipfel ($1200$ m) auf. Am Sonntag geht er zwischen $8$ und $18$ Uhr auf demselben Weg hinab. $s_1(t)$ und $s_2(t)$ bezeichnen seine Höhe am Samstag bzw. Sonntag zur Uhrzeit $t$; beide Funktionen sind stetig.

a) Geben Sie $s_1(8), s_1(18), s_2(8), s_2(18)$ an.
b) Betrachten Sie $h(t) = s_1(t) - s_2(t)$. Berechnen Sie $h(8)$ und $h(18)$.
c) Folgern Sie mit dem Zwischenwertsatz, dass es eine Uhrzeit gibt, zu der der Wanderer an beiden Tagen in derselben Höhe ist.
d) Muss diese Uhrzeit eindeutig sein? Geben Sie ein Beispiel für mehrere solche Zeitpunkte an.

## Aufgabe 9

### Aufgabe 9 – Gegenüberliegende Orte am Äquator

Die Temperatur auf dem Äquator wird durch eine stetige Funktion $T(\theta)$ des Längengrades $\theta \in [0^\circ, 360^\circ]$ beschrieben, wobei $T(0^\circ) = T(360^\circ)$.

a) Definieren Sie $g(\theta) = T(\theta) - T(\theta + 180^\circ)$ für $\theta \in [0^\circ, 180^\circ]$. Zeigen Sie $g(180^\circ) = -g(0^\circ)$.
b) Folgern Sie, dass es zwei gegenüberliegende Punkte des Äquators mit gleicher Temperatur gibt.
c) Prüfen Sie die Aussage am Modell $T(\theta) = 25 + 5\cos\theta$ und bestimmen Sie die Punkte.
d) Welche Voraussetzung ist entscheidend?

## Aufgabe 10

### Aufgabe 10 – Wurzel aus 2 durch Halbieren

Ein Computer soll $\sqrt{2}$ als Nullstelle von $f(x) = x^2 - 2$ mit dem Bisektionsverfahren berechnen. Startintervall ist $[1, 2]$.

a) Begründen Sie, dass in $[1, 2]$ eine Nullstelle liegt.
b) Führen Sie fünf Bisektionsschritte durch. Notieren Sie Mittelpunkt, Vorzeichen von $f$ und neues Intervall in einer Tabelle.
c) Wie viele Schritte braucht man, um $\sqrt{2}$ auf $10^{-6}$ genau einzuschließen?
d) Warum funktioniert das Verfahren für $f(x) = \frac{1}{x - 1{,}5}$ auf $[1, 2]$ nicht, obwohl das Vorzeichen wechselt?

## Aufgabe 11

### Aufgabe 11 – Der Kaffee kühlt ab

Eine Tasse Kaffee mit $90$ °C steht in einem Raum mit $20$ °C. Ihre Temperatur nach $t$ Minuten ist $T(t) = 20 + 70e^{-0{,}1t}$.

a) Bestimmen Sie $\lim_{t \to \infty} T(t)$ und deuten Sie den Wert.

b) Begründen Sie mit dem Zwischenwertsatz, dass der Kaffee irgendwann genau $50$ °C hat.
c) Berechnen Sie diesen Zeitpunkt.
d) Warum gibt es genau einen solchen Zeitpunkt?

## Aufgabe 12

### Aufgabe 12 – Stetige und unstetige Tarife

Zwei Mobilfunktarife berechnen den Monatspreis in Abhängigkeit vom Datenvolumen $x$ (in GB). Tarif A: $10$ € bis $5$ GB, darüber $10 + 3(x - 5)$ €. Tarif B: $10$ € bis $5$ GB, darüber $15 + 2(x - 5)$ €.

a) Ist der Preis bei Tarif A stetig? Ist er bei $5$ GB differenzierbar?
b) Untersuchen Sie Tarif B an der Stelle $5$. Welche Art von Unstetigkeit liegt vor?
c) Wie müsste man Tarif B ändern, damit er stetig wird, wenn der Preis pro zusätzlichem GB $2$ € bleibt?
d) Ab welchem Datenvolumen ist Tarif B günstiger als Tarif A?

## Aufgabe 13

### Aufgabe 13 – Zwanzig Kilometer in einer Stunde

Eine Radfahrerin fährt $60$ km in genau $3$ Stunden, mit wechselnder Geschwindigkeit und Pausen. $s(t)$ ist die bis zur Zeit $t$ zurückgelegte Strecke, eine stetige Funktion mit $s(0) = 0$, $s(3) = 60$.

a) Definieren Sie $g(t) = s(t + 1) - s(t)$ für $t \in [0, 2]$. Was bedeutet $g(t)$?
b) Zeigen Sie $g(0) + g(1) + g(2) = 60$.
c) Folgern Sie, dass es ein Zeitfenster von genau einer Stunde gibt, in dem sie genau $20$ km fährt.
d) Gilt dasselbe für ein Zeitfenster von genau $40$ Minuten und $13\frac{1}{3}$ km? Begründen Sie kurz.

## Aufgabe 14

### Aufgabe 14 – Asymptoten einer gebrochen-rationalen Funktion

Gegeben ist $f(x) = \frac{2x^2+3x}{x^2-1}$.

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich und die Nullstellen.
b) Untersuchen Sie das Verhalten an den Definitionslücken mit einseitigen Grenzwerten.
c) Bestimmen Sie die waagerechte Asymptote.
d) Schneidet der Graph die waagerechte Asymptote? Wenn ja, wo?

## Aufgabe 15

### Aufgabe 15 – Wann gibt es Maximum und Minimum?

Der Extremwertsatz verlangt eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen, beschränkten Intervall. Untersuchen Sie, was passiert, wenn eine Voraussetzung fehlt.

a) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ auf $[0, \infty)$: Bestimmen Sie Maximum, Infimum und ob beide angenommen werden.
b) $f(x) = x$ auf $(0, 1)$.
c) $f(x) = \frac{1}{x}$ auf $(0, 1]$.
d) $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ auf $[0, 2]$.
e) Erklären Sie für jedes Beispiel, welche Voraussetzung verletzt ist.

## Aufgabe 16

### Aufgabe 16 – Ein Fixpunkt muss existieren

Ein Punkt $x^*$ mit $f(x^*) = x^*$ heißt Fixpunkt von $f$.

a) Zeigen Sie: Jede stetige Funktion $f : [0, 1] \to [0, 1]$ hat einen Fixpunkt. Betrachten Sie $g(x) = f(x) - x$.
b) Zeigen Sie, dass $\cos x = x$ eine Lösung in $[0, 1]$ hat.
c) Die Iteration $x_{n+1} = \cos x_n$ mit $x_0 = 1$ konvergiert. Geben Sie den Grenzwert auf vier Stellen an und begründen Sie, warum er ein Fixpunkt ist.
d) Geben Sie eine stetige Funktion $f : (0, 1) \to (0, 1)$ ohne Fixpunkt an.

## Aufgabe 17

### Aufgabe 17 – Eine stetige Umkehrfunktion

Gegeben ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x$.

a) Zeigen Sie, dass $f$ streng monoton wachsend ist.
b) Bestimmen Sie $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$ und folgern Sie, dass $f$ bijektiv ist.
c) Berechnen Sie $f^{-1}(2)$ und $f^{-1}(10)$.
d) Warum ist $f^{-1}$ stetig, obwohl man keine Formel für $f^{-1}$ angeben muss?

## Aufgabe 18

### Aufgabe 18 – Gleichmäßige Stetigkeit

Eine Funktion heißt gleichmäßig stetig, wenn das $\delta$ zu $\varepsilon$ nicht von der Stelle abhängt.

a) Zeigen Sie, dass $f(x) = x^2$ auf $[0, 2]$ Lipschitz-stetig mit $L = 4$ ist.
b) Zeigen Sie mit $x_n = n$, $y_n = n + \frac{1}{n}$, dass $x^2$ auf $\mathbb{R}$ nicht gleichmäßig stetig ist.
c) Zeigen Sie $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}$ und folgern Sie, dass $\sqrt{x}$ auf $[0, 1]$ gleichmäßig stetig ist.
d) Ist $\sqrt{x}$ auf $[0, 1]$ Lipschitz-stetig?

## Aufgabe 19

### Aufgabe 19 – Eine Funktionalgleichung

Gesucht sind alle stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x+y) = f(x) + f(y)$ für alle $x, y$. Sei $c = f(1)$.

a) Zeigen Sie $f(0) = 0$ und $f(-x) = -f(x)$.
b) Zeigen Sie $f(n) = cn$ für $n \in \mathbb{N}$ und dann für $n \in \mathbb{Z}$.
c) Zeigen Sie $f\left(\frac{p}{q}\right) = c\frac{p}{q}$ für rationale Zahlen.
d) Folgern Sie mit dem Folgenkriterium $f(x) = cx$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

## Aufgabe 20

**Aufgabe 20 – Knobelaufgabe: Polynome ungeraden Grades**

Sei $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ ein reelles Polynom mit ungeradem Grad $n$.

a) Zeigen Sie $\frac{p(x)}{x^n} \to 1$ für $x \to \pm\infty$.
b) Folgern Sie, dass $p(x) \to +\infty$ für $x \to +\infty$ und $p(x) \to -\infty$ für $x \to -\infty$.
c) Beweisen Sie: $p$ hat mindestens eine reelle Nullstelle.
d) Zeigen Sie an $x^3 - 3x + 1$ mit einer Wertetabelle bei $-2, 0, 1, 2$, dass es drei Nullstellen gibt, und geben Sie Intervalle an.
e) Warum gilt die Aussage aus c) für gerade Grade nicht?