Lösungen - Stetigkeit und Grenzwerte von Funktionen

Klasse: Studium 1 Semester

Lösung zu Aufgabe 1

a) $\frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2 \to 4$.

b) $\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2+x+1}{x+1} \to \frac{3}{2}$.

c) $\frac{x^2(3+1/x^2)}{x^2(2-1/x)} \to \frac{3}{2}$.

d) $\frac{x(1+1/x)}{x^2(1+1/x^2)} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1+1/x}{1+1/x^2} \to 0$.

Erläuterung: Setzt man in a) und b) direkt ein, erhält man den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$. Dann zerlegt man Zähler und Nenner in Faktoren und kürzt den gemeinsamen Faktor; der gekürzte Ausdruck ist stetig und man kann einsetzen. Im Unendlichen klammert man in Zähler und Nenner die höchste Potenz aus. Es entscheiden die Grade: gleicher Grad ergibt das Verhältnis der Leitkoeffizienten, höherer Nennergrad den Grenzwert null.

Lösung zu Aufgabe 2

a) Für $x > 0$ ist der Wert 1, für x gleich -1: einseitige Grenzwerte -1 und 1, kein Grenzwert (Sprung).

b) $x \to 3^+$: $+\infty$; $x \to 3^-$: $-\infty$. Polstelle mit Vorzeichenwechsel.

c) Links 1, rechts 2: Sprung, kein Grenzwert.

d) $x \to 0^+$: $\frac{1}{x} \to \infty$, also $e^{1/x} \to \infty$. $x \to 0^-$: $\frac{1}{x} \to -\infty$, also $e^{1/x} \to 0$. Kein Grenzwert.

Lösung zu Aufgabe 3

a) Mit $u = 3x$: $3 \cdot \frac{\sin u}{u} \to 3$.

b) Mit $u = 2x$: $2 \cdot \frac{e^u - 1}{u} \to 2$.

c) Mit $u = 3x$: $3 \cdot \frac{\ln(1+u)}{u} \to 3$.

d) $\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \to 1 \cdot 1 = 1$.

Erläuterung: Der Trick besteht darin, das Argument im Zähler und den Nenner anzugleichen. Bei $\frac{\sin 3x}{x}$ erweitert man mit 3 und setzt $u = 3x$; weil mit $x \to 0$ auch $u \to 0$ gilt, darf man den bekannten Grenzwert benutzen.

Lösung zu Aufgabe 4

a) Linksseitig $1 + a$, rechtsseitig und Funktionswert 5. Stetig für $a = 4$.

b) $\frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x+3 \to 6$. Stetig für $c = 6$ (hebbare Lücke).

c) $\frac{\sin x}{x} \to 1$, also $d = 1$.

Erläuterung: An einer Nahtstelle müssen linksseitiger Grenzwert, rechtsseitiger Grenzwert und Funktionswert übereinstimmen. Aus dieser Gleichheit erhält man eine Gleichung für den Parameter. Bei einer hebbaren Lücke setzt man den Grenzwert als Funktionswert ein.

Lösung zu Aufgabe 5

a) $|f(x)-7| = 3|x-2|$ für $|x-2|$.
b) $|x^2-1| = |x-1||x+1|$. Für $|x-1|$ ist $|x+1|$. Mit $\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{3}\right)$ folgt $|x^2-1|$.
c) $|\sqrt{x}-2| = \frac{|x-4|}{\sqrt{x}+2} \leq \frac{|x-4|}{2}$. Mit $\delta = 2\varepsilon$ folgt $|\sqrt{x}-2|$.
Erläuterung: Bei Epsilon-Delta-Beweisen schätzt man $|f(x)-f(x_0)|$ durch ein Vielfaches von $|x-x_0|$ ab. Hängt der Faktor noch von x ab, beschränkt man x zuerst auf eine Umgebung (zum Beispiel $|x-x_0|$) und nimmt das Minimum zweier Schranken als δ.

Lösung zu Aufgabe 6

a) $x_n = \frac{1}{2\pi n}$: $\cos\frac{1}{x_n} = 1$. $y_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$: $\cos\frac{1}{y_n} = -1$. Verschiedene Grenzwerte, also kein Grenzwert.
b) [redacted] (Einschließung).
c) Zu jedem x_0 gibt es rationale Folgen $q_n \to x_0$ und irrationale Folgen $r_n \to x_0$ (Dichtheit). Dann $D(q_n) \to 1$ und $D(r_n) \to 0$; mindestens einer der Grenzwerte ist $\neq D(x_0)$.

Lösung zu Aufgabe 7

a) $2{,}00$ €, $2{,}00$ €, $3{,}50$ €, $2 + 3 \cdot 1{,}50 = 6{,}50$ €.
b) Nach 7 vollen Stunden kostet es $2 + 6 \cdot 1{,}5 = 11$ €. Jede Dauer über 7 Stunden würde $12{,}50$ € ergeben: ab $t > 7$ gilt der Höchstsatz von 12 €.
c) Bei $t = 1, 2, \ldots, 7$ springt die Gebühr (um $1{,}50$ € bzw. bei 7 um 1 €). Sprungstellen; ab 7 ist sie konstant.
d) An $t = k$ gilt noch der alte Betrag, unmittelbar danach der neue. Also ist die Funktion dort linksseitig stetig, nicht rechtsseitig.

Lösung zu Aufgabe 8

a) $s_1(8) = 0$, $s_1(18) = 1200$, $s_2(8) = 1200$, $s_2(18) = 0$.
b) $h(8) = -1200$, $h(18) = 1200 > 0$.
c) h ist als Differenz stetiger Funktionen stetig auf $[8, 18]$ und wechselt das Vorzeichen. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es t^* mit $h(t^*) = 0$, also $s_1(t^*) = s_2(t^*)$.
d) Nein. Geht er am Samstag zwischendurch ein Stück zurück, kann h mehrfach das Vorzeichen wechseln; dann gibt es mehrere Zeitpunkte.

Lösung zu Aufgabe 9

a) $g(180°) = T(180°) - T(360°) = T(180°) - T(0°) = -g(0°)$.
b) Ist $g(0°) = 0$, sind wir fertig. Sonst haben $g(0°)$ und $g(180°)$ verschiedene Vorzeichen, und der Zwischenwertsatz liefert eine Nullstelle von g.
c) $g(\theta) = 5\cos\theta - 5\cos(\theta + 180°) = 10\cos\theta = 0$ für $\theta = 90°$. Die Punkte $90°$ und $270°$ haben beide 25 °C.
d) Die Stetigkeit von T. Mit einem Temperatursprung könnte g das Vorzeichen wechseln, ohne 0 anzunehmen.

Lösung zu Aufgabe 10

a) $f(1) = -1$, $f(2) = 2 > 0$, f ist stetig.
b) $m = 1{,}5$: $f > 0$, $[1; 1{,}5]$. $m = 1{,}25$: f, $[1{,}25; 1{,}5]$. $m = 1{,}375$: f, $[1{,}375; 1{,}5]$. $m = 1{,}4375$: $f > 0$, $[1{,}375; 1{,}4375]$. $m = 1{,}40625$: f, $[1{,}40625; 1{,}4375]$.
c) Intervalllänge $2^{-n} 6 \log_2 10 \approx 19{,}93$: 20 Schritte.
d) Die Funktion ist bei $1{,}5$ nicht definiert bzw. unstetig (Polstelle). Ohne Stetigkeit gilt der Zwischenwertsatz nicht; das Verfahren findet die Polstelle statt einer Nullstelle.

Lösung zu Aufgabe 11

a) $e^{-0{,}1t} \to 0$, also $T \to 20$ °C: Der Kaffee nimmt Raumtemperatur an.
b) $T(0) = 90$ und zum Beispiel $T(30) = 20 + 70e^{-3} \approx 23{,}5$. T ist stetig, 50 liegt dazwischen.
c) $70e^{-0{,}1t} = 30 \iff t = 10 \ln \frac{7}{3} \approx 8{,}47$ min.
d) T ist streng monoton fallend, nimmt also jeden Wert höchstens einmal an.

Lösung zu Aufgabe 12

a) Bei 5 GB: links 10, rechts $10 + 0 = 10$: stetig. Die Steigung springt von 0 auf 3: nicht differenzierbar (Knick).
b) Links 10, rechts 15: Sprung um 5 €.
c) $10 + 2(x - 5)$ für $x > 5$, also ohne den Aufschlag von 5 €.
d) $15 + 2(x - 5)$ GB. Bei 10 GB kosten beide 25 €.

Lösung zu Aufgabe 13

a) Die in der Stunde von t bis $t + 1$ zurückgelegte Strecke.
b) Teleskopsumme: $s(1) - s(0) + s(2) - s(1) + s(3) - s(2) = s(3) - s(0) = 60$.
c) Die drei Werte haben den Mittelwert 20. Also ist einer ≥ 20 und einer ≤ 20. g ist stetig, nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein t mit $g(t) = 20$.
d) Nicht unbedingt. Das Argument braucht, dass die Gesamtzeit ein ganzzahliges Vielfaches der Fensterlänge ist; hier ist $3\,\text{h} : 40\,\text{min} = 4{,}5$. Nach dem Satz von der universellen Sehne ist ein solches Fenster nur für die Längen $\frac{3}{n}$ Stunden garantiert, und es gibt Fahrprofile ohne ein 40-Minuten-Fenster mit genau $13\frac{1}{3}$ km.

Lösung zu Aufgabe 14

a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Nullstellen: $x(2x+3) = 0$, also $x = 0$ und $x = -\frac{3}{2}$.
b) Bei 1: Zähler $5 > 0$; $x \to 1^+$: $+\infty$, $x \to 1^-$: $-\infty$. Bei -1: Zähler -1; $x \to -1^+$: Nenner , also $+\infty$; $x \to -1^-$: $-\infty$. Zwei Polstellen mit Vorzeichenwechsel.
c) Gleicher Grad: $y = \frac{2}{1} = 2$.
d) $2x^2 + 3x = 2x^2 - 2 \iff x = -\frac{2}{3}$. Der Graph schneidet die Asymptote bei .
Erläuterung: Senkrechte Asymptoten liegen an Nullstellen des Nenners, die keine Nullstellen des Zählers sind.

Lösung zu Aufgabe 15

a) $f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0$ bei $x = 1$; Maximum $f(1) = \frac{1}{2}$. Minimum $f(0) = 0$, wird angenommen. Für $x \to \infty$ gilt $f \to 0$.
b) Supremum 1, Infimum 0, keines wird angenommen.
c) Unbeschränkt nach oben ($f \to \infty$ für $x \to 0^+$); Minimum $f(1) = 1$.
d) Werte in $[0, 1)$; Supremum 1 wird nicht angenommen, Minimum 0 schon.
e) a) unbeschränktes Intervall (hier trotzdem Maximum, aber nicht garantiert), b) offenes Intervall, c) halboffenes Intervall, d) Funktion unstetig bei 1.

Lösung zu Aufgabe 16

a) $g(0) = f(0) \geq 0$ und $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$. g ist stetig, nach dem Zwischenwertsatz hat g eine Nullstelle. □
b) $\cos$ bildet $[0, 1]$ in $[\cos 1, 1] \subseteq [0, 1]$ ab; nach a) gibt es einen Fixpunkt.
c) $x^* \approx 0{,}7391$. Wegen der Stetigkeit von $\cos$: $x^* = \lim x_{n+1} = \lim \cos x_n = \cos x^*$.
d) $f(x) = \frac{x}{2}$: Aus $\frac{x}{2} = x$ folgt $x = 0 \notin (0, 1)$. Die Abgeschlossenheit des Intervalls ist nötig.

Lösung zu Aufgabe 17

a) Für x ist x^3 und damit $x^3 + x$.
b) $f \to \pm\infty$. Als stetige Funktion nimmt f nach dem Zwischenwertsatz jeden Wert an (surjektiv); strenge Monotonie liefert Injektivität.
c) $1^3 + 1 = 2$: $f^{-1}(2) = 1$. $2^3 + 2 = 10$: $f^{-1}(10) = 2$.
d) Nach dem Satz über Umkehrfunktionen ist die Umkehrung einer streng monotonen, stetigen Funktion auf einem Intervall stetig.

Lösung zu Aufgabe 18

a) $|x^2 - y^2| = |x + y||x - y| \leq 4|x - y|$ für $x, y \in [0, 2]$.
b) $|x_n - y_n| = \frac{1}{n} \to 0$, aber $|y_n^2 - x_n^2| = 2 + \frac{1}{n^2} \geq 2$. Für $\varepsilon = 1$ gibt es kein gemeinsames δ.
c) Für $x \geq y \geq 0$: $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \leq (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = x - y$. Mit $\delta = \varepsilon^2$ folgt gleichmäßige Stetigkeit.

d) Nein: $\frac{\sqrt{x}-0}{x-0} = \frac{1}{\sqrt{x}} \to \infty$ für $x \to 0$; es gibt keine feste Schranke L.

Lösung zu Aufgabe 19

a) $f(0) = f(0+0) = 2f(0)$, also $f(0) = 0$. $0 = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$.
b) Induktion: $f(n+1) = f(n) + f(1) = cn + c$. Mit a) $f(-n) = -cn$.
c) $cp = f(p) = f\left(q \cdot \frac{p}{q}\right) = q\, f\left(\frac{p}{q}\right)$, da $f(qy) = qf(y)$ wie in b).
d) Zu $x \in \mathbb{R}$ gibt es rationale $r_n \to x$. Wegen der Stetigkeit
$f(x) = \lim f(r_n) = \lim cr_n = cx$. □

Lösung zu Aufgabe 20

a) $\frac{p(x)}{x^n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^n} \to 1$.
b) Für großes $|x|$ ist $p(x) \geq \frac{1}{2}x^n$ bzw. $\leq \frac{1}{2}x^n$ mit gleichem Vorzeichen wie x^n; bei ungeradem n ist $x^n \to \pm\infty$.
c) Es gibt a mit $p(a)$. Nach dem Zwischenwertsatz hat p in (a, b) eine Nullstelle. □
d) $p(-2) = -1$, $p(0) = 1$, $p(1) = -1$, $p(2) = 3$. Drei Vorzeichenwechsel: Nullstellen in $(-2, 0)$, $(0, 1)$ und $(1, 2)$. Mehr als drei kann ein Polynom vom Grad 3 nicht haben.
e) Bei geradem Grad streben beide Enden gegen $+\infty$ (bei positivem Leitkoeffizienten). Beispiel: $x^2 + 1$ hat keine reelle Nullstelle.