Lösungen zur Klassenarbeit - Riemann-Integral und Hauptsatz

Klasse: Studium 1 Semester · Dauer: 60 Minuten · /20

Lösung zu Aufgabe 1 (4 BE/Punkte)

a) $\left[x^2 - \frac{1}{x}\right]_1^2 = \left(4 - \frac{1}{2}\right) - (1 - 1) = \frac{7}{2}$ (2 P.).

b) $[\sin x]_0^{\pi/2} = 1$ (2 P.).

Für $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$ erhöht man den Exponenten auf -1 und teilt durch -1; daraus entsteht $-\frac{1}{x}$. Beim Einsetzen der Grenzen steht die obere zuerst. Kontrolle für a): Der Integrand wächst auf $[1, 2]$ von 3 auf $4{,}25$, der Wert $3{,}5$ liegt zwischen diesen Schranken. Bei b) ist $\sin$ die Stammfunktion von $\cos$. So erkennt man Vorzeichenfehler sofort.

Lösung zu Aufgabe 2 (5 BE/Punkte)

a) Partiell ($u = x$, $v' = e^{-x}$): $[-xe^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx = -e^{-1} + 1 - e^{-1} = 1 - \frac{2}{e} \approx 0{,}264$ (3 P.).

b) $u = x^2 + 5$: $\left[\sqrt{x^2 + 5}\right]_0^2 = 3 - \sqrt{5} \approx 0{,}764$ (2 P.).

In a) wählt man $u = x$, weil die Ableitung einfacher wird, und $v' = e^{-x}$ mit $v = -e^{-x}$; das verbleibende Integral ist elementar. In b) ist der Zähler bis auf den Faktor zwei die Ableitung des Radikanden, deshalb substituiert man $u = x^2 + 5$. Die Grenzen werden mittransformiert: von 5 bis 9, also Wurzelwerte von $\sqrt{5}$ bis 3.

Lösung zu Aufgabe 3 (4 BE/Punkte)

a) $x^2 = 2x \iff x = 0$ oder $x = 2$ (1 P.).

b) $\int_0^2 (2x - x^2)\,dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$ (3 P.).

Die Schnittstellen erhält man durch Gleichsetzen und Ausklammern von x. Zwischen den Schnittstellen liegt die Gerade oberhalb der Parabel, wie der Testwert $x = 1$ mit $2 > 1$ zeigt; deshalb integriert man $g - f$. Das Ergebnis ist positiv, wie es für eine Fläche sein muss. Eine Skizze beider Graphen gehört zur vollständigen Lösung.

Lösung zu Aufgabe 4 (4 BE/Punkte)

a) $r'(t) = 12 - 4t = 0 \iff t = 3$; $r(3) = 18$ L/h (2 P.).

b) $\int_0^6 (12t - 2t^2)\,dt = \left[6t^2 - \frac{2}{3}t^3\right]_0^6 = 216 - 144 = 72$ L (2 P.).

Der Zufluss ist eine nach unten geöffnete Parabel mit Nullstellen bei 0 und 6; ihr Maximum liegt in der Mitte. Die Gesamtmenge ist nach dem Hauptsatz das Integral der Rate über die Dauer. Kontrolle über den Mittelwert: Die durchschnittliche Rate beträgt

$\frac{72}{6} = 12$ Liter pro Stunde, also zwei Drittel des Maximums, wie es bei Parabeln stets der Fall ist.

Lösung zu Aufgabe 5 (3 BE/Punkte)

a) $F'(x) = \ln x$; Nullstelle $x = 1$, Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$: Minimum $F(1) = 0$ (2 P.).
b) $G'(x) = 2x\cos(x^2)$ (1 P.).
Nach dem ersten Teil des Hauptsatzes ist die Ableitung der Integralfunktion der Integrand an der oberen Grenze. Die Extremstelle findet man wie üblich über die Nullstelle der Ableitung und den Vorzeichenwechsel. In b) kommt nach der Kettenregel die Ableitung der oberen Grenze x^2 als Faktor hinzu; eine Stammfunktion des Kosinus braucht man dafür gar nicht.