Lernzettel - Riemann-Integral und Hauptsatz

Klasse: Studium 1 Semester

Einstieg: Wie viel Beton passt in einen Tunnel?

Ein Ingenieurbüro plant einen Straßentunnel mit gewölbtem Querschnitt. Für die Ausschreibung muss es wissen, wie viel Erdreich ausgehoben wird. Die Querschnittsfläche lässt sich nicht mit Rechteck- oder Kreisformeln berechnen, denn der Rand ist eine Kurve. Die Idee des Integrals ist uralt: Man zerlegt die Fläche in schmale Streifen, nähert jeden durch ein Rechteck an und lässt die Streifen immer schmaler werden. Bernhard Riemann hat diese Idee 1854 in Göttingen präzise gefasst. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung zeigt dann, dass man solche Grenzwerte gar nicht mühsam ausrechnen muss: Es genügt, eine Stammfunktion zu finden.

Das Riemann-Integral

Definition: Das Riemann-Integral

Das **Riemann-Integral** misst den orientierten Flächeninhalt unter dem Graphen. Man zerlegt $[a,b]$ durch Punkte $a = x_0$ in Teilintervalle und bildet die **Untersumme** $U = \sum m_i \, \Delta x_i$ (mit $m_i = \inf f$ auf $[x_{i-1}, x_i]$) und die **Obersumme** $O = \sum M_i \, \Delta x_i$ (mit $M_i = \sup f$). Eine beschränkte Funktion heißt **Riemann-integrierbar**, wenn $\sup U = \inf O$ gilt; dieser gemeinsame Wert ist $\int_a^b f(x)\,dx$. Jede stetige Funktion und jede monotone Funktion auf $[a,b]$ ist integrierbar, ebenso stückweise stetige Funktionen. Es gelten: Linearität $\int (\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$, Monotonie ($f \le g \Rightarrow \int f \le \int g$), Intervalladditivität $\int_a^c = \int_a^b + \int_b^c$, und ■. Der **Mittelwertsatz der Integralrechnung**: Für stetiges f gibt es $\xi \in [a,b]$ mit $\int_a^b f = f(\xi)(b-a)$.

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Definition: Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Teil 1: Ist f stetig auf $[a,b]$, so ist $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ differenzierbar und $F'(x) = f(x)$. **Teil 2:** Ist G eine beliebige Stammfunktion von f, so gilt $\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) = \big[G(x)\big]_a^b$. Damit sind Differenzieren und Integrieren zueinander inverse Operationen. Mit der Kettenregel folgt $\frac{d}{dx}\int_a^{u(x)} f(t)\,dt = f(u(x))\,u'(x)$.

Integrationstechniken

Definition: Integrationstechniken

Partielle Integration: $\int u\,v'\,dx = uv - \int u'v\,dx$. Man wählt u so, dass u' einfacher wird (etwa $u = x$ oder $u = \ln x$) und v' leicht integrierbar ist. **Substitution:** $\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$ mit $u = g(x)$; bei bestimmten Integralen transformiert man die Grenzen mit: $\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$. **Partialbruchzerlegung** für rationale Funktionen: $\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)$. Wichtige Stammfunktionen: $\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ $(n \neq -1)$, $\int \frac{1}{x} = \ln|x|$, $\int e^x = e^x$, $\int \sin = -\cos$, $\int \cos = \sin$, $\int \frac{f'}{f} = \ln|f|$.

Uneigentliche Integrale

Definition: Uneigentliche Integrale

Ist der Integrationsbereich unbeschränkt oder die Funktion an einer Randstelle unbeschränkt, definiert man das Integral als Grenzwert: $\int_1^\infty f = \lim_{R\to\infty}\int_1^R f$ und $\int_0^1 f = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 f$. Beispiele: $\int_1^\infty x^{-p}dx = \frac{1}{p-1}$ für $p > 1$, divergent für $p \le 1$; $\int_0^1 x^{-p}dx = \frac{1}{1-p}$ für p, divergent für $p \ge 1$. Der Integralvergleich zeigt: $\sum \frac{1}{k^p}$ konvergiert genau für $p > 1$.

So gehst du vor: Integral berechnen

1. Stammfunktion bestimmen: Grundintegral, Substitution oder partielle Integration.
2. Probe durch Ableiten.
3. Grenzen einsetzen: $F(b) - F(a)$.
4. Bei Flächen zwischen Kurven Schnittpunkte bestimmen und obere minus untere Funktion integrieren.

Beispiel 1 (Ober- und Untersumme)

$f(x) = x^2$ auf $[0,1]$ mit $n = 4$ gleich breiten Streifen: $U = \frac{1}{4}\left(0 + \frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{9}{16}\right) = \frac{7}{32}$, $O = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{9}{16} + 1\right) = \frac{15}{32}$. Der Integralwert $\frac{1}{3} \approx 0{,}333$ liegt dazwischen.

Beispiel 2 (partielle Integration)

$\int xe^x\,dx$: $u = x$, $v' = e^x \Rightarrow \int xe^x = xe^x - \int e^x = (x-1)e^x$. Also $\int_0^1 xe^x dx = \left[(x-1)e^x\right]_0^1 = 0 - (-1) = 1$.

Beispiel 3 (Substitution)

$\int_0^1 2xe^{x^2}dx$: $u = x^2$, $du = 2x\,dx$, Grenzen $0 \to 0$, $1 \to 1$: $\int_0^1 e^u du = e - 1$.

Beispiel 4 (Fläche zwischen Kurven)

$y = x$ und $y = x^2$ schneiden sich bei 0 und 1; $A = \int_0^1 (x - x^2)dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

Zerlegungen, Ober- und Untersummen

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Eine **Zerlegung** Z ist eine endliche Menge von Teilungspunkten $a = x_0$. Auf jedem Teilintervall nimmt man das Infimum m_k und das Supremum M_k von f und bildet die Untersumme $U(Z) = \sum m_k(x_k - x_{k-1})$ sowie die Obersumme $O(Z) = \sum M_k(x_k - x_{k-1})$. Verfeinert man die Zerlegung, so wächst die Untersumme und die Obersumme fällt. Stimmen das Supremum aller Untersummen und das Infimum aller Obersummen überein, heißt f **Riemann-integrierbar**, und der gemeinsame Wert ist $\int_a^b f(x)\,dx$. Gleichwertig: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Zerlegung mit $O(Z) - U(Z)$.

Satz: Welche Funktionen sind integrierbar?

Jede stetige Funktion auf $[a, b]$ ist integrierbar, ebenso jede monotone Funktion und jede beschränkte Funktion mit nur endlich vielen Sprungstellen. Nicht integrierbar sind unbeschränkte Funktionen (für sie gibt es keine endlichen Obersummen) und stark unstetige Funktionen wie die Dirichlet-Funktion, die auf $\mathbb{Q}$ den Wert 1 und sonst den Wert 0 hat.

Beispiel 5 (Integral als Grenzwert)

Berechnen Sie $\int_0^1 x^2\,dx$ mit Obersummen bei äquidistanter Zerlegung.

Mit $x_k = \frac{k}{n}$ ist f monoton wachsend, also $M_k = \left(\frac{k}{n}\right)^2$ und $O_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$. Für $n \to \infty$ strebt dies gegen $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Die Untersumme $U_n = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}$ hat denselben Grenzwert, und $O_n - U_n = \frac{1}{n} \to 0$.

Eigenschaften des Integrals

Das Integral ist **linear**: $\int(\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$. Es ist **monoton**: Aus $f \le g$ folgt $\int_a^b f \le \int_a^b g$. Es ist **additiv** bezüglich des Intervalls: $\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$; mit der Vereinbarung $\int_b^a f = -\int_a^b f$ gilt das für beliebige Lage von a, b, c. Schließlich gilt die Dreiecksungleichung ■. Ein Integral misst also eine *orientierte* Fläche: Flächenstücke unterhalb der x-Achse zählen negativ.

Satz: Mittelwertsatz der Integralrechnung

Ist f stetig auf $[a,b]$, so gibt es ein $\xi \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\,(b-a).$$

Die Zahl $\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ heißt **Mittelwert** von f auf $[a,b]$: Das Rechteck mit der Höhe $\bar{f}$ hat dieselbe Fläche wie die Fläche unter dem Graphen.

Beispiel 6 (Mittelwert einer Schwingung)

Bestimmen Sie den Mittelwert von $\sin$ auf $[0,\pi]$.

$\int_0^\pi \sin x\,dx = [-\cos x]_0^\pi = 1+1 = 2$. Mittelwert: $\frac{2}{\pi} \approx 0{,}637$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein ξ mit $\sin\xi = \frac{2}{\pi}$, etwa $\xi = \arcsin\frac{2}{\pi} \approx 0{,}690$. In der Elektrotechnik ist dies der Gleichrichtwert einer Sinusspannung mit Scheitelwert 1.

Der Hauptsatz und Integralfunktionen

Ist f stetig, so ist die **Integralfunktion** $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ differenzierbar mit $F' = f$ (erster Teil des Hauptsatzes). Ist G irgendeine Stammfunktion, so gilt $\int_a^b f = G(b) - G(a)$ (zweiter Teil). Der Beweis des ersten Teils benutzt den Mittelwertsatz: $\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(\xi_h)$ mit ξ_h zwischen x und $x+h$; wegen der Stetigkeit strebt das gegen $f(x)$. Mit der Kettenregel lassen sich auch Integrale mit variablen Grenzen ableiten: $\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x)$.

Beispiel 7 (Ableitung ohne Stammfunktion)

Leiten Sie $G(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2}\,dt$ ab.

Für e^{-t^2} gibt es keine elementare Stammfunktion, trotzdem ist die Ableitung leicht: Mit $F(y) = \int_0^y e^{-t^2}dt$ ist $G(x) = F(x^2)$ und nach der Kettenregel $G'(x) = F'(x^2)\cdot 2x = 2x\,e^{-x^4}$.

Weitere Integrationstechniken

Neben partieller Integration und Substitution ist die **Partialbruchzerlegung** das dritte Standardverfahren. Man zerlegt einen gebrochen-rationalen Integranden in eine Summe einfacher Brüche, deren Stammfunktionen Logarithmen oder Arcustangens sind. Ist der Zählergrad nicht kleiner als der Nennergrad, führt man vorher eine Polynomdivision durch.

So gehst du vor: Welche Technik?

1. Steht die innere Ableitung als Faktor da (etwa $2x\,e^{x^2}$ oder $\frac{f'}{f}$), substituieren.

2. Produkt aus Polynom und e^x, $\sin$, $\cos$ oder $\ln$: partiell integrieren; das Polynom wird abgeleitet (bei $\ln$ umgekehrt).
3. Gebrochen-rational: Nenner faktorisieren, Partialbruchzerlegung.
4. Zum Schluss immer die Probe durch Ableiten.

Beispiel 8 (Partialbruchzerlegung)

Berechnen Sie $\int_2^3 \frac{dx}{x^2-1}$.

$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$ ergibt $1 = A(x+1) + B(x-1)$; mit $x=1$: $A = \frac{1}{2}$, mit $x=-1$: $B = -\frac{1}{2}$. Also $\int_2^3 \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left[\ln \frac{x-1}{x+1}\right]_2^3 = \frac{1}{2}\left(\ln \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\ln \frac{3}{2} \approx 0{,}203$.

Uneigentliche Integrale und Rotationskörper

Ist das Intervall unbeschränkt oder der Integrand an einem Rand unbeschränkt, definiert man das Integral als Grenzwert, etwa $\int_1^\infty f = \lim_{b\to\infty} \int_1^b f$. Analog zu den p-Reihen gilt: $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ existiert genau für $p > 1$, $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ genau für p. Das **Integralvergleichskriterium** verbindet beide Welten: Für eine positive, fallende Funktion f konvergiert $\sum f(k)$ genau dann, wenn $\int_1^\infty f$ existiert. Eine wichtige Anwendung des Integrals sind Volumina: Dreht man den Graphen von $f \geq 0$ über $[a,b]$ um die x-Achse, entsteht ein Körper mit dem Volumen $V = \pi \int_a^b f(x)^2\,dx$, denn jede dünne Scheibe ist ein Zylinder mit der Grundfläche $\pi f(x)^2$.

Beispiel 9 (Das Kegelvolumen aus dem Integral)

Leiten Sie die Formel $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ für einen Kegel her.

Legt man die Spitze in den Ursprung und die Achse auf die x-Achse, so ist der Radius in der Höhe x gleich $f(x) = \frac{r}{h}x$ für $0 \leq x \leq h$. Dann ist $V = \pi \int_0^h \frac{r^2}{h^2}x^2\,dx = \pi\frac{r^2}{h^2}\cdot\frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Die aus der Schule bekannte Formel ist also eine Folgerung aus dem Integralbegriff.

Das Integral in Naturwissenschaft und Technik

Überall, wo eine Größe sich aus vielen kleinen Beiträgen zusammensetzt, steht ein Integral. Ist $v(t)$ die Geschwindigkeit, so ist $\int_{t_0}^{t_1} v(t)\,dt$ der zurückgelegte Weg; ist $P(t)$ eine Leistung, so ist ihr Integral die Energie; ist $r(t)$ eine Zuflussrate, so ist ihr Integral die zugeflossene Menge. Die Arbeit einer veränderlichen Kraft längs eines Weges ist $W = \int_a^b F(s)\,ds$; beim Spannen einer Feder mit $F(s) = Ds$ ergibt sich so $W = \frac{1}{2}Ds^2$. In der Wahrscheinlichkeitsrechnung beschreibt eine Dichte $f \geq 0$ mit $\int f = 1$ eine stetige Zufallsgröße, und $\int_a^b f(x)\,dx$ ist die Wahrscheinlichkeit, einen Wert zwischen a und b zu beobachten. In allen Fällen gilt dieselbe Denkweise: Man zerlegt in kleine Stücke, auf denen die Größe nahezu konstant ist, multipliziert und summiert, und der Grenzübergang

liefert das exakte Ergebnis. Der Hauptsatz zeigt umgekehrt, dass die Änderungsrate der Gesamtgröße wieder der Integrand ist.

Achtung: Typische Fehler beim Integrieren

Ein Integral ist keine Fläche, wenn f das Vorzeichen wechselt: Für die Fläche zwischen Graph und Achse muss man an den Nullstellen aufteilen und Beträge nehmen. Bei der Substitution müssen die Grenzen mit transformiert werden – oder man substituiert am Ende zurück, aber nicht beides halb. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$ ist nicht $\left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1} = -2$: Der Integrand ist bei 0 unbeschränkt, das uneigentliche Integral divergiert. Und die Integrationskonstante gehört zu jeder unbestimmten Stammfunktion.

Wusstest du? Von Archimedes zu Riemann

Archimedes berechnete um 250 v. Chr. die Fläche unter einem Parabelbogen mit einer Ausschöpfungsmethode, die den Ober- und Untersummen sehr nahe kommt. Newton und Leibniz entdeckten um 1670 unabhängig voneinander, dass Integrieren die Umkehrung des Differenzierens ist. Das Integralzeichen $\int$ ist ein langgezogenes S für „Summe“ und stammt von Leibniz. Riemann lieferte 1854 in seiner Habilitationsschrift die erste exakte Definition.

Hinweis: Integrale in der Klausur

Schreiben Sie bei jedem bestimmten Integral die Stammfunktion in eckigen Klammern mit Grenzen auf, bevor Sie einsetzen. So vermeiden Sie Vorzeichenfehler. Kontrollieren Sie Ergebnisse grob: Ist der Integrand positiv, muss das Integral positiv sein; liegt er zwischen m und M, liegt das Integral zwischen $m(b-a)$ und $M(b-a)$. Bei unbestimmten Integralen ist die Probe durch Ableiten der schnellste Test: Sie dauert meist nur eine Zeile und deckt fast jeden Fehler bei Vorzeichen, Faktoren oder Kettenregel auf. Bei uneigentlichen Integralen schreiben Sie den Grenzwert ausdrücklich hin, statt die Grenze ∞ einfach einzusetzen, und prüfen Sie vorher, ob der Integrand im Inneren des Intervalls eine Polstelle hat. Skizzieren Sie bei Flächenaufgaben die Graphen, bevor Sie rechnen: Die Skizze zeigt, welche Funktion oben liegt und wo Schnittstellen zu erwarten sind.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Riemann-Integral: Ober- und Untersummen bei immer feineren Zerlegungen; f integrierbar, wenn $\sup U = \inf O$, gleichwertig $O(Z) - U(Z)$ für eine Zerlegung.
- Stetige, monotone und stückweise stetige beschränkte Funktionen sind integrierbar; unbeschränkte und die Dirichlet-Funktion nicht.
- Eigenschaften: linear, monoton, additiv bezüglich der Grenzen; ■ ; Integrale messen orientierte Flächen.
- Mittelwertsatz: $\int_a^b f = f(\xi)(b-a)$ für stetiges f; Mittelwert $\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f$.
- Hauptsatz: $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ hat $F' = f$; $\int_a^b f = G(b) - G(a)$ für jede

Stammfunktion G; $\frac{d}{dx}\int_a^{v(x)} f = f(v(x))v'(x)$.

- Techniken: partielle Integration $\int uv' = uv - \int u'v$, Substitution, Partialbruchzerlegung; Probe durch Ableiten.
- Uneigentliche Integrale als Grenzwerte: $\int_1^\infty x^{-p}dx$ existiert für $p > 1$, $\int_0^1 x^{-p}dx$ für p; Rotationsvolumen $V = \pi\int_a^b f^2\,dx$.

Achtung

Typische Fehler: Bei der Substitution die Grenzen nicht mittransformieren, beim Hauptsatz die Stetigkeit voraussetzen vergessen, $\int f(x)g(x)dx = \int f \cdot \int g$ rechnen, oder Flächen unterhalb der Achse mit falschem Vorzeichen addieren (Flächeninhalt $\int |f|$, nicht $\int f$). Beim uneigentlichen Integral das Intervall nicht in Grenzwerte auflösen.

Ottos Tipp

Machen Sie nach jeder Integration die Probe durch Ableiten. Bei Produkten aus Polynom und $e^x, \sin, \cos$ hilft partielle Integration, bei Verkettung mit innerer Ableitung die Substitution.