Arbeitsblatt - Riemann-Integral und Hauptsatz

Klasse: Studium 1 Semester · 20

Der Rechenweg muss angegeben werden.

Aufgabe 1

Aufgabe 1 – Bestimmte Integrale

Berechnen Sie die Integrale mit einer Stammfunktion. Geben Sie die Stammfunktion jeweils in eckigen Klammern an.

a) $\int_0^2 (3x^2 - 2x + 1)\,dx$
b) $\int_1^e \frac{1}{x}\,dx$
c) $\int_0^{\pi} \sin x\,dx$
d) $\int_0^1 e^{2x}\,dx$

Aufgabe 2

Aufgabe 2 – Ober- und Untersummen

Gegeben ist $f(x) = x$ auf $[0, 1]$ mit der äquidistanten Zerlegung in n Teilintervalle.

a) Berechnen Sie Unter- und Obersumme für $n = 4$.
b) Zeigen Sie allgemein $U_n = \frac{n-1}{2n}$ und $O_n = \frac{n+1}{2n}$.
c) Bestimmen Sie $\int_0^1 x\,dx$ als gemeinsamen Grenzwert.
d) Ab welchem n ist $O_n - U_n$?

Aufgabe 3

Aufgabe 3 – Eine Obersumme mit Kubikzahlen

Berechnen Sie $\int_0^1 x^3\,dx$ mit Obersummen. Verwenden Sie die Formel $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

a) Stellen Sie O_n für die äquidistante Zerlegung auf.
b) Vereinfachen Sie und bestimmen Sie den Grenzwert.
c) Vergleichen Sie mit dem Ergebnis des Hauptsatzes.

Aufgabe 4

Aufgabe 4 – Partielle Integration

Berechnen Sie mit partieller Integration $\int uv' = uv - \int u'v$. Geben Sie an, was Sie als u und v' wählen.

a) $\int x e^x \, dx$
b) $\int_0^{\pi} x \sin x \, dx$
c) $\int_1^e \ln x \, dx$
d) $\int_0^1 x^2 e^x \, dx$

Aufgabe 5

Aufgabe 5 – Substitution

Berechnen Sie mit einer geeigneten Substitution. Transformieren Sie die Grenzen mit.

a) $\int_0^1 2x(x^2+1)^3 \, dx$
b) $\int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x \, dx$
c) $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} \, dx$
d) $\int_1^e \frac{\ln x}{x} \, dx$

Aufgabe 6

Aufgabe 6 – Partialbruchzerlegung

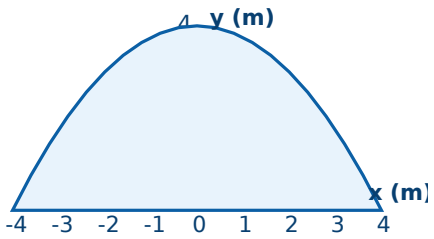
Zerlegen Sie den Integranden in Partialbrüche und integrieren Sie.

a) $\int_2^3 \frac{dx}{x^2-1}$
b) $\int_0^1 \frac{2x+3}{(x+1)(x+2)} \, dx$
c) $\int \frac{x^2}{x+1} \, dx$ (zuerst Polynomdivision)

Aufgabe 7

Aufgabe 7 – Der Tunnelquerschnitt

Der Querschnitt eines Straßentunnels wird durch die Parabel $y = 4 - \frac{x^2}{4}$ über der Fahrbahn ($y = 0$) begrenzt (Einheit: m).



a) Bestimmen Sie die Breite des Tunnels am Boden.
b) Berechnen Sie die Querschnittsfläche.
c) Der Tunnel ist 250 m lang. Wie viel Kubikmeter Erdreich werden ausgehoben (ohne Wandstärke)?
d) Ein Lastwagen ist 3 m hoch und $2{,}5$ m breit. Passt er mittig durch den Tunnel?

Aufgabe 8

Aufgabe 8 – Zufluss in einen Wassertank

In einen Tank fließt Wasser mit der Rate $r(t) = 20 + 6t - t^2$ Liter pro Minute ($0 \le t \le 6$, t in Minuten). Zu Beginn enthält der Tank 50 Liter.

a) Wann ist die Zuflussrate am größten, und wie groß ist sie dann?
b) Wie viel Wasser fließt in den sechs Minuten zu?
c) Geben Sie den Tankinhalt $V(t)$ als Integralfunktion an und berechnen Sie $V(3)$.
d) Wie groß ist die mittlere Zuflussrate?

Aufgabe 9

Aufgabe 9 – Anfahren und Weiterfahren

Ein Zug beschleunigt aus dem Stand gleichmäßig: $v(t) = 3t$ (in m/s) für $0 \le t \le 10$ s, danach fährt er mit 30 m/s weiter.

a) Skizzieren Sie $v(t)$ für $0 \le t \le 20$.
b) Welchen Weg legt er in den ersten 10 s zurück?
c) Welchen Weg legt er in den ersten 20 s zurück? Wie groß ist die mittlere Geschwindigkeit?
d) Wann hat er 1 km zurückgelegt?

Aufgabe 10

Aufgabe 10 – Energie einer Solaranlage

An einem Sommertag liefert eine Solaranlage zwischen 6 und 18 Uhr die Leistung $P(t) = 5\sin\frac{\pi t}{12}$ (in kW), wobei t die Zeit in Stunden ab 6 Uhr ist.

a) Wann ist die Leistung maximal, und wie groß ist sie?
b) Berechnen Sie die an diesem Tag erzeugte Energie $E = \int_0^{12} P(t)\,dt$ in kWh.
c) Wie groß ist die mittlere Leistung?
d) Ein Haushalt verbraucht 12 kWh am Tag. Wie viele Haushalte könnte die Anlage rechnerisch versorgen?

Aufgabe 11

Aufgabe 11 – Die mittlere Tagestemperatur

An einem Frühlingstag wird die Temperatur durch $T(t) = 12 - 6\cos\frac{\pi t}{12}$ (in °C, t in Stunden nach Mitternacht, $0 \le t \le 24$) modelliert.

a) Bestimmen Sie Minimum und Maximum und die Uhrzeiten.
b) Berechnen Sie die mittlere Tagestemperatur.
c) Berechnen Sie die mittlere Temperatur zwischen 6 und 18 Uhr.
d) Warum unterscheidet sich der Mittelwert über die Tageszeit vom Mittelwert aus Minimum und Maximum hier nicht, in der Realität aber oft schon?

Aufgabe 12

Aufgabe 12 – Das Volumen eines Fasses

Ein Holzfass ist 10 dm hoch. Sein Radius in der Höhe x (gemessen von der Mitte, $-5 \le x \le 5$) beträgt $r(x) = 4 - \frac{x^2}{25}$ dm. Das Fass entsteht durch Rotation von r um die x-Achse.

a) Welchen Radius hat das Fass am Boden und in der Mitte?
b) Berechnen Sie das Volumen $V = \pi \int_{-5}^{5} r(x)^2 \, dx$ in Litern.
c) Vergleichen Sie mit Zylindern vom Radius 3 dm und 4 dm.
d) Ein Weinbauer füllt 400 Liter ein. Reicht das Fass?

Aufgabe 13

Aufgabe 13 – Ableiten von Integralfunktionen

Bestimmen Sie die Ableitung mit dem Hauptsatz (und gegebenenfalls der Kettenregel).

a) $F(x) = \int_0^x \sqrt{1 + t^3} \, dt$
b) $G(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{t} \, dt$ für $x > 0$; kontrollieren Sie durch direktes Integrieren.
c) $H(x) = \int_0^{\sin x} e^{t^2} \, dt$
d) Bestimmen Sie die Extremstelle von $K(x) = \int_0^x (t - 1) e^{-t} \, dt$.

Aufgabe 14

Aufgabe 14 – Mittelwerte

Bestimmen Sie den Mittelwert und eine Stelle ξ gemäß Mittelwertsatz.

a) $f(x) = x^2$ auf $[0, 3]$
b) $f(x) = \sin x$ auf $[0, \pi]$
c) Zeigen Sie an *f(x)=\begin{cases}0&x* auf $[0, 2]$, dass der Mittelwertsatz ohne Stetigkeit falsch sein kann.

Aufgabe 15

Aufgabe 15 – Die Trompete des Torricelli

Dreht man den Graphen von $f(x) = \frac{1}{x}$ für $x \ge 1$ um die x-Achse, entsteht ein unendlich langer Trichter. Seine Mantelfläche ist $M = 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} \, dx$.

a) Berechnen Sie das Volumen $V = \pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} \, dx$ als uneigentliches Integral.
b) Zeigen Sie $M \ge 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \, dx$ und folgern Sie $M = \infty$.
c) Ein Maler sagt: „Ich kann den Trichter mit π Litern Farbe füllen, aber seine Oberfläche nie anstreichen.“ Lösen Sie das scheinbare Paradoxon auf.
d) Für welche Exponenten p ist das Volumen beim Graphen von x^{-p} endlich?

Aufgabe 16

Aufgabe 16 – Summen durch Integrale abschätzen

Für eine positive, fallende Funktion f gilt $\int_1^{n+1} f(x)\,dx \le \sum_{k=1}^{n} f(k) \le f(1) + \int_1^{n} f(x)\,dx$.

a) Begründen Sie die Ungleichungen mit einer Skizze aus Rechtecken der Breite 1.
b) Folgern Sie $\ln(n+1) \le H_n \le 1 + \ln n$ für $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
c) Schätzen Sie H_{1000} ein.
d) Zeigen Sie mit $f(x) = \frac{1}{x^2}$, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \le 2$.

Aufgabe 17

Aufgabe 17 – Numerische Integration

Das Integral $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx$ hat den Wert π (denn $4\arctan 1 = \pi$). Ein Computer soll es mit $n = 4$ Teilintervallen der Breite $h = 0{,}25$ nähern.

x	0	0,25	0,5	0,75	1
$f(x)$	4	3,764706	3,2	2,56	2

a) Bestätigen Sie $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx = \pi$.
b) Berechnen Sie die Trapezsumme $T = h\left(\frac{f_0}{2} + f_1 + f_2 + f_3 + \frac{f_4}{2}\right)$.
c) Berechnen Sie die Simpsonsumme $S = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + f_4)$.
d) Vergleichen Sie die Fehler. Warum ist die Simpsonregel so viel genauer?

Aufgabe 18

Aufgabe 18 – Fläche zwischen zwei Kurven

Gegeben sind $f(x) = x^3 - 3x$ und $g(x) = x$.

a) Bestimmen Sie die Schnittstellen.
b) Berechnen Sie die Fläche zwischen den Graphen.
c) Berechnen Sie $\int_{-2}^{2} (g(x) - f(x))\,dx$. Warum ist das nicht die Fläche?
d) Begründen Sie das Ergebnis von c) mit einer Symmetrieüberlegung.

Aufgabe 19

Aufgabe 19 – Wann existiert das Integral?

Untersuchen Sie die Riemann-Integrierbarkeit und die Existenz von Stammfunktionen.

a) Zeigen Sie, dass die Dirichlet-Funktion $D(x) = 1$ für $x \in \mathbb{Q}$, $D(x) = 0$ sonst auf $[0,1]$ nicht integrierbar ist.
b) Warum ist $f(x) = \frac{1}{x}$ für 0, $f(0) = 0$ nicht Riemann-integrierbar?
c) Die Vorzeichenfunktion sgn ist auf $[-1,1]$ integrierbar. Berechnen Sie $\Phi(x) = \int_{-1}^{x} \operatorname{sgn}(t)\,dt$.

d) Ist Φ eine Stammfunktion von sgn?

Aufgabe 20

Aufgabe 20 – Knobelaufgabe: Eine Rekursion für Sinuspotenzen

Sei $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$ für $n \geq 0$.

a) Berechnen Sie I_0 und I_1.
b) Zeigen Sie mit partieller Integration ($u = \sin^{n-1} x$, $v' = \sin x$) die Rekursion $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ für $n \geq 2$.
c) Berechnen Sie I_2, I_3, I_4, I_5.
d) Begründen Sie $I_{2m+1} \leq I_{2m} \leq I_{2m-1}$ und erklären Sie, wie daraus das Wallissche Produkt $\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots$ entsteht.