Lösungen - Riemann-Integral und Hauptsatz

Klasse: Studium 1 Semester

Lösung zu Aufgabe 1

a) $\left[x^3 - x^2 + x\right]_0^2 = 8 - 4 + 2 = 6$.
b) $\left[\ln x\right]_1^e = 1 - 0 = 1$.
c) $\left[-\cos x\right]_0^\pi = 1 - (-1) = 2$.
d) $\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 = \frac{e^2-1}{2} \approx 3{,}1945$.

Erläuterung: Nach dem Hauptsatz genügt es, irgendeine Stammfunktion zu finden und die Differenz der Werte an den Grenzen zu bilden. Bei Potenzen erhöht man den Exponenten um eins und teilt durch den neuen Exponenten, bei $\frac{1}{x}$ erhält man den Logarithmus, bei e^{2x} muss man durch die innere Ableitung 2 teilen. Eine Probe durch Ableiten der Stammfunktion bestätigt jedes Ergebnis.

Lösung zu Aufgabe 2

a) $U_4 = \frac{1}{4}\left(0 + \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4}\right) = \frac{6}{16} = 0{,}375$, $O_4 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} + 1\right) = \frac{10}{16} = 0{,}625$.
b) $U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} = \frac{(n-1)n}{2n^2} = \frac{n-1}{2n}$, $O_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{n+1}{2n}$.
c) Beide streben gegen $\frac{1}{2}$.
d) $O_n - U_n = \frac{1}{n}100$, also ab $n = 101$.

Erläuterung: Weil $f(x) = x$ wächst, liegt das Minimum jedes Teilintervalls am linken und das Maximum am rechten Rand. Der Abstand zwischen Ober- und Untersumme ist die Summe kleiner Rechtecke der Höhe $\frac{1}{n}$; er wird beliebig klein, also ist die Funktion integrierbar.

Lösung zu Aufgabe 3

a) f wächst, also $M_k = \left(\frac{k}{n}\right)^3$: $O_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{n^3} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^4}\sum k^3$.
b) $O_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4n^4} = \frac{(n+1)^2}{4n^2} \to \frac{1}{4}$.
c) $\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$. Übereinstimmung.

Erläuterung: Die Rechnung zeigt, wie mühsam die Definition über Grenzwerte ist, selbst für eine einfache Potenz: Man braucht eine Summenformel für Kubikzahlen und eine Grenzwertbetrachtung. Der Hauptsatz liefert dasselbe Ergebnis in einer Zeile. Gerade dieser Vergleich macht deutlich, warum der Hauptsatz als einer der wichtigsten Sätze der Analysis gilt.

Lösung zu Aufgabe 4

a) $u = x$, $v' = e^x$: $xe^x - \int e^x\,dx = (x-1)e^x + C$. Probe: $((x-1)e^x)' = e^x + (x-1)e^x = xe^x$.
b) $u = x$, $v' = \sin x$: $[-x\cos x]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x\,dx = \pi + 0 = \pi$.
c) $u = \ln x$, $v' = 1$: $[x\ln x]_1^e - \int_1^e 1\,dx = e - (e-1) = 1$.
d) Zweimal partiell: $\int x^2e^x = x^2e^x - 2\int xe^x = (x^2-2x+2)e^x$. $[\ldots]_0^1 = e - 2 \approx 0{,}718$.
Erläuterung: Man wählt u so, dass es beim Ableiten einfacher wird (Polynom, Logarithmus), und v' so, dass man es leicht integrieren kann. Bei $\ln x$ hilft der Trick, den Faktor 1 als v' einzufügen. Bei höheren Potenzen muss man mehrmals partiell integrieren.

Lösung zu Aufgabe 5

a) $u = x^2+1$, $du = 2x\,dx$, Grenzen 1 bis 2: $\int_1^2 u^3\,du = \left[\frac{u^4}{4}\right]_1^2 = \frac{16-1}{4} = \frac{15}{4}$.
b) $u = \cos x$, $du = -\sin x\,dx$, Grenzen 1 bis 0: $\int_1^0 -u^2\,du = \int_0^1 u^2\,du = \frac{1}{3}$.
c) $u = 1+x^2$: $\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln 2 \approx 0{,}347$.
d) $u = \ln x$, $du = \frac{dx}{x}$, Grenzen 0 bis 1: $\int_0^1 u\,du = \frac{1}{2}$.
Erläuterung: Eine Substitution lohnt sich, wenn die Ableitung des inneren Ausdrucks als Faktor vorkommt. Transformiert man die Grenzen mit, muss man am Ende nicht zurücksubstituieren.

Lösung zu Aufgabe 6

a) $\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)$. $\frac{1}{2}\left[\ln\frac{x-1}{x+1}\right]_2^3 = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{2} - \ln\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2} \approx 0{,}203$.
b) $2x+3 = A(x+2) + B(x+1)$: $x = -1$ gibt $A = 1$, $x = -2$ gibt $B = 1$.
$\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}\right)dx = \ln 2 + \ln\frac{3}{2} = \ln 3 \approx 1{,}099$.
c) $\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$. Stammfunktion $\frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + C$. Probe: $x - 1 + \frac{1}{x+1} = \frac{x^2-1+1}{x+1}$.
Erläuterung: Die Koeffizienten der Partialbrüche bestimmt man am schnellsten, indem man die Nullstellen des Nenners einsetzt; dann fallen alle anderen Summanden weg. Ist der Zählergrad mindestens so groß wie der Nennergrad, kommt vorher eine Polynomdivision.

Lösung zu Aufgabe 7

a) $4 - \frac{x^2}{4} = 0 \iff x = \pm 4$: 8 m breit.
b) $\int_{-4}^4 \left(4 - \frac{x^2}{4}\right)dx = \left[4x - \frac{x^3}{12}\right]_{-4}^4 = 2\left(16 - \frac{64}{12}\right) = \frac{64}{3} \approx 21{,}33$ m².
c) $250 \cdot \frac{64}{3} \approx 5333$ m³.
d) In 3 m Höhe gilt $4 - \frac{x^2}{4} = 3 \iff x = \pm 2$: Der Tunnel ist dort 4 m breit. Ein $2{,}5$ m

breiter Lastwagen passt mittig hindurch (Spielraum je $0{,}75$ m).

Lösung zu Aufgabe 8

a) $r'(t) = 6 - 2t = 0 \iff t = 3$; $r(3) = 20 + 18 - 9 = 29$ L/min.

b) $\int_0^6 (20 + 6t - t^2)\,dt = \left[20t + 3t^2 - \frac{t^3}{3}\right]_0^6 = 120 + 108 - 72 = 156$ L.

c) $V(t) = 50 + \int_0^t r(s)\,ds = 50 + 20t + 3t^2 - \frac{t^3}{3}$; $V(3) = 50 + 60 + 27 - 9 = 128$ L.

d) $\frac{156}{6} = 26$ L/min.

Erläuterung: Die Zuflussrate ist die Ableitung des Tankinhalts. Nach dem Hauptsatz erhält man den Inhalt als Anfangswert plus Integral der Rate.

Lösung zu Aufgabe 9

a) Ansteigende Gerade bis $(10|30)$, danach waagerecht.

b) $\int_0^{10} 3t\,dt = \left[\frac{3}{2}t^2\right]_0^{10} = 150$ m (Dreiecksfläche).

c) $150 + 30 \cdot 10 = 450$ m; mittlere Geschwindigkeit $\frac{450}{20} = 22{,}5$ m/s.

d) $150 + 30(t - 10) = 1000 \iff t = 10 + \frac{850}{30} \approx 38{,}3$ s.

Erläuterung: Der Weg ist die Fläche unter dem Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm: zuerst ein Dreieck, dann ein Rechteck. Die mittlere Geschwindigkeit ist der Weg geteilt durch die Zeit, also der Mittelwert der Funktion v.

Lösung zu Aufgabe 10

a) Maximum bei $\frac{\pi t}{12} = \frac{\pi}{2}$, also $t = 6$ (12 Uhr): 5 kW.

b) $\left[-\frac{60}{\pi}\cos\frac{\pi t}{12}\right]_0^{12} = \frac{60}{\pi} \cdot 2 = \frac{120}{\pi} \approx 38{,}2$ kWh.

c) $\frac{120/\pi}{12} = \frac{10}{\pi} \approx 3{,}18$ kW.

d) $\frac{38{,}2}{12} \approx 3{,}2$: rechnerisch drei Haushalte.

Erläuterung: Leistung mal Zeit ist Energie; bei veränderlicher Leistung tritt das Integral an die Stelle des Produkts.

Lösung zu Aufgabe 11

a) Minimum 6 °C um 0 Uhr, Maximum 18 °C um 12 Uhr.

b) $\frac{1}{24}\int_0^{24} T\,dt = 12 - \frac{6}{24}\left[\frac{12}{\pi}\sin\frac{\pi t}{12}\right]_0^{24} = 12$ °C.

c) $\frac{1}{12}\int_6^{18} T\,dt = 12 - \frac{6}{\pi}\left(\sin\frac{3\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}\right) = 12 + \frac{12}{\pi} \approx 15{,}82$ °C.

d) Die Kosinuskurve ist symmetrisch um ihren Mittelwert. Reale Tagesgänge sind unsymmetrisch (schnelle Erwärmung, langsame Abkühlung); dann weicht das Integralmittel vom einfachen Mittel ab.

Lösung zu Aufgabe 12

a) $r(\pm 5) = 4 - 1 = 3$ dm, $r(0) = 4$ dm.

b) $r^2 = 16 - \frac{8x^2}{25} + \frac{x^4}{625}$. $\pi\left[16x - \frac{8x^3}{75} + \frac{x^5}{3125}\right]_{-5}^{5} = \pi\left(160 - \frac{80}{3} + 2\right) = \frac{406}{3}\pi \approx 425{,}2$ Liter.
c) Zylinder: $\pi \cdot 9 \cdot 10 \approx 282{,}7$ L und $\pi \cdot 16 \cdot 10 \approx 502{,}7$ L. Das Fass liegt dazwischen, näher am größeren.
d) Ja, 425 Liter > 400 Liter.
Erläuterung: Das Fass wird in dünne Scheiben zerlegt; jede ist ein Zylinder mit dem Radius $r(x)$.

Lösung zu Aufgabe 13

a) $F'(x) = \sqrt{1 + x^3}$.
b) $G'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot 2x - \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$. Direkt: $G(x) = \ln x^2 - \ln x = \ln x$, $G' = \frac{1}{x}$.
c) $H'(x) = e^{\sin^2 x} \cos x$.
d) $K'(x) = (x-1)e^{-x} = 0 \iff x = 1$. Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$: Minimum bei $x = 1$.
Erläuterung: Nach dem Hauptsatz ist die Ableitung einer Integralfunktion der Integrand an der oberen Grenze. Hängt die Grenze von x ab, kommt nach der Kettenregel die Ableitung der Grenze als Faktor hinzu; an der unteren Grenze mit negativem Vorzeichen.

Lösung zu Aufgabe 14

a) $\frac{1}{3}\int_0^3 x^2\,dx = \frac{1}{3} \cdot 9 = 3$; $\xi^2 = 3$, $\xi = \sqrt{3} \approx 1{,}73 \in [0, 3]$.
b) $\frac{2}{\pi} \approx 0{,}637$; $\xi = \arcsin\frac{2}{\pi} \approx 0{,}690$ (oder $\pi - 0{,}690$).
c) Mittelwert $\frac{1}{2}\int_0^2 f = \frac{1}{2}$. Die Funktion nimmt aber nur die Werte 0 und 1 an, nie $\frac{1}{2}$.
Erläuterung: Der Mittelwert ist die Höhe des Rechtecks über $[a, b]$, das dieselbe Fläche wie die Fläche unter dem Graphen hat. Nur für stetige Funktionen wird dieser Wert garantiert angenommen.

Lösung zu Aufgabe 15

a) $\pi \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = \pi \lim\left(1 - \frac{1}{b}\right) = \pi$.
b) $\sqrt{1 + x^{-4}} \geq 1$, also $M \geq 2\pi \lim_{b\to\infty} \ln b = \infty$.
c) Eine Farbschicht hat eine feste Mindestdicke. Weit hinten ist der Trichter dünner als jede Farbschicht; mathematische Flächen haben keine Dicke. Das Füllen bemalt die Innenseite gewissermaßen mit immer dünneren Schichten.
d) $\pi\int_1^\infty x^{-2p}\,dx$ existiert genau für $2p > 1$, also $p > \frac{1}{2}$.

Lösung zu Aufgabe 16

a) Das Rechteck über $[k, k+1]$ mit Höhe $f(k)$ liegt oberhalb des Graphen (linke Seite), das Rechteck über $[k-1, k]$ mit Höhe $f(k)$ darunter (rechte Seite).

b) $\int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(n+1)$ und $1 + \int_1^n \frac{dx}{x} = 1 + \ln n$.
c) $6{,}909 \le H_{1000} \le 7{,}908$; der genaue Wert ist $7{,}485$.
d) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \le 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^2} = 2 - \frac{1}{n}$.

Lösung zu Aufgabe 17

a) $[4 \arctan x]_0^1 = 4 \cdot \frac{\pi}{4} = \pi$.
b) $0{,}25 \cdot (2 + 3{,}764706 + 3{,}2 + 2{,}56 + 1) = 0{,}25 \cdot 12{,}524706 \approx 3{,}131176$.
c) $\frac{0{,}25}{3} \cdot (4 + 15{,}058824 + 6{,}4 + 10{,}24 + 2) = \frac{0{,}25}{3} \cdot 37{,}698824 \approx 3{,}141569$.
d) Fehler Trapez $\approx 0{,}0104$, Simpson $\approx 0{,}0000245$. Die Trapezregel ersetzt f stückweise durch Geraden, die Simpsonregel durch Parabeln; ihr Fehler fällt mit h^4 statt h^2.
Erläuterung: Numerische Verfahren nutzen nur Funktionswerte an wenigen Stellen. Je besser die Ersatzfunktion den Graphen nachbildet, desto kleiner ist der Fehler.

Lösung zu Aufgabe 18

a) $x^3 - 3x = x \iff x(x^2 - 4) = 0$: $x = -2, 0, 2$.
b) Auf $[0, 2]$ ist $g \ge f$: $\int_0^2 (4x - x^3)\,dx = 8 - 4 = 4$. Aus Symmetrie ebenso 4 auf $[-2, 0]$. Gesamtfläche 8.
c) $\left[2x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_{-2}^{2} = 0$. Auf $[-2, 0]$ liegt f oberhalb von g, die Teilflächen zählen dort negativ und heben sich auf.
d) $g - f = 4x - x^3$ ist ungerade; über ein zur 0 symmetrisches Intervall ist das Integral einer ungeraden Funktion 0.

Lösung zu Aufgabe 19

a) Jedes Teilintervall enthält rationale und irrationale Zahlen: $m_k = 0$, $M_k = 1$. Also $U = 0$, $O = 1$ für jede Zerlegung.
b) f ist unbeschränkt; im ersten Teilintervall ist das Supremum ∞, es gibt keine endliche Obersumme.
c) $\Phi(x) = -(x+1)$ für $x \le 0$ und $\Phi(x) = -1 + x$ für $x > 0$, also $\Phi(x) = |x| - 1$.
d) Nein: Φ ist bei 0 nicht differenzierbar. Ableitungen haben die Zwischenwerteigenschaft (Satz von Darboux), sgn nicht. Integrierbare Funktionen müssen also keine Stammfunktion besitzen.

Lösung zu Aufgabe 20

a) $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = [-\cos x]_0^{\pi/2} = 1$.
b) $I_n = [-\sin^{n-1} x \cos x]_0^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x\,dx = (n-1)(I_{n-2} - I_n)$. Also $nI_n = (n-1)I_{n-2}$. $\square$
c) $I_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$, $I_3 = \frac{2}{3}$, $I_4 = \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{16}$, $I_5 = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$.
d) Wegen $0 \le \sin x \le 1$ fallen die Potenzen, also auch die Integrale. Der Quotient $\frac{I_{2m}}{I_{2m+1}}$

liegt zwischen 1 und $\frac{I_{2m-1}}{I_{2m+1}} = \frac{2m+1}{2m} \to 1$. Setzt man die Produktformeln für I_{2m} (enthält $\frac{\pi}{2}$) und I_{2m+1} ein, folgt das Produkt.