Lösungen zur Klassenarbeit - Reihen und Konvergenzkriterien

Klasse: Studium 1 Semester · Dauer: 60 Minuten · /20

Lösung zu Aufgabe 1 (4 BE/Punkte)

a) Erstes Glied $\frac{3}{5}$, $q = \frac{1}{5}$: $\frac{3/5}{4/5} = \frac{3}{4}$ (2 P.).

b) $\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}$; $s_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \to \frac{1}{2}$ (2 P.).

In a) bestimmt man erstes Glied und Quotient der geometrischen Reihe; die Formel gilt, weil der Quotient betragsmäßig kleiner als eins ist. In b) faktorisiert man den Nenner und erhält eine Teleskopreihe. Die Partialsumme $\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$ zeigt, dass sich alle inneren Terme aufheben. Kontrolle: Die ersten drei Glieder $\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} = 0{,}3$ liegen unter $\frac{1}{2}$.

Lösung zu Aufgabe 2 (6 BE/Punkte)

a) Quotient $\frac{(k+1)^2}{2k^2} \to \frac{1}{2}$: konvergent (2 P.).

b) $\frac{1}{\sqrt{k}+1} \geq \frac{1}{2\sqrt{k}}$, divergente Minorante: divergent (1 P.).

c) Leibniz: $\frac{1}{\ln(k+1)}$ fällt monoton gegen 0: konvergent (nicht absolut, da $\frac{1}{\ln(k+1)} \geq \frac{1}{k}$) (2 P.).

d) Wurzel: $\frac{2k}{3k+1} \to \frac{2}{3}$: konvergent (1 P.).

Das Kriterium wird nach der Bauart gewählt: Exponentialterme sprechen für den Quotienten, eine Wurzel im Nenner für den Vergleich mit einer p-Reihe, wechselnde Vorzeichen für Leibniz und ein k-te Potenz für das Wurzelkriterium. Bei Leibniz sind Monotonie und Nullfolge ausdrücklich zu begründen. Ohne Nennung des Kriteriums gibt es keinen vollen Punktwert.

Lösung zu Aufgabe 3 (4 BE/Punkte)

a) $3 \cdot 0{,}5^4 = 0{,}1875$ m (1 P.).

b) $3 + 2\sum_{k\geq 1} 3 \cdot 0{,}5^k = 3 + 2 \cdot 3 = 9$ m (3 P.).

Jede Sprunghöhe wird zweimal durchlaufen, einmal aufwärts und einmal abwärts; nur die anfängliche Fallhöhe zählt einfach. Die Sprunghöhen bilden eine geometrische Folge mit dem Faktor $\frac{1}{2}$, ihre Summe ist 3. Obwohl der Ball unendlich oft aufspringt, ist die Gesamtstrecke endlich. Nach dem vierten Aufprall sind es weniger als zwanzig Zentimeter.

Lösung zu Aufgabe 4 (3 BE/Punkte)

a) $\frac{1}{k^2}$ fällt monoton gegen 0; Leibniz (sogar absolut konvergent) (1 P.).

b) $\frac{1}{(n+1)^2}10$: $n = 10$ Glieder (2 P.).
Die Glieder sind positiv, fallen monoton und streben gegen null, deshalb greift Leibniz; wegen $\sum \frac{1}{k^2}$ liegt sogar absolute Konvergenz vor. Der Fehler einer Partialsumme ist höchstens das erste weggelassene Glied. Aus $(n+1)^2 > 100$ folgt die benötigte Gliederzahl. Die Partialsumme mit zehn Gliedern beträgt etwa $0{,}8179$, der Reihenwert $0{,}8225$.

Lösung zu Aufgabe 5 (3 BE/Punkte)

a) $a_n = s_n - s_{n-1} \to s - s = 0$ (2 P.).
b) $\frac{1}{k} \to 0$, aber $\sum \frac{1}{k}$ divergiert (1 P.).
Der Beweis nutzt, dass sich zwei aufeinanderfolgende Partialsummen um ein Glied unterscheiden; beide streben gegen denselben Grenzwert, also das Glied gegen null. Die Umkehrung scheitert an der harmonischen Reihe, deren Partialsummen nach Oresme durch Gruppieren über jede Schranke wachsen. Das Kriterium ist also nur notwendig, nicht hinreichend. Für die Klausur zählt vor allem das Gegenbeispiel mit kurzer Begründung der Divergenz.