Lernzettel - Reihen und Konvergenzkriterien

Klasse: Studium 1 Semester

Einstieg: Ein Bücherturm, der über die Tischkante ragt

Stapeln Sie gleich lange Bücher so, dass jedes ein Stück über das darunterliegende hinausragt. Mit geschickter Verschiebung ragt das oberste Buch nach n Büchern um $\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$ Buchlängen über die Tischkante hinaus. Schon mit vier Büchern liegt das oberste vollständig neben dem Tisch – und weil die Summe in der Klammer über jede Grenze wächst, ließe sich der Überhang mit genügend vielen Büchern beliebig groß machen. Andererseits ergibt $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$ nur 2, obwohl ebenfalls unendlich viele positive Zahlen addiert werden. Wann eine unendliche Summe einen endlichen Wert hat, ist die Frage dieses Kapitels.

Reihen und Partialsummen

Definition: Reihen und Partialsummen

Eine **unendliche Reihe** $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist die Folge der **Partialsummen** $s_n = a_1 + \cdots + a_n$. Sie **konvergiert**, wenn (s_n) einen Grenzwert s hat; dann heißt s die Summe der Reihe. Andernfalls divergiert sie. Eine notwendige Bedingung liefert das **Nullfolgenkriterium**: Konvergiert $\sum a_k$, so gilt $a_k \to 0$. Die Umkehrung gilt nicht: Die **harmonische Reihe** $\sum \frac{1}{k}$ divergiert, obwohl $\frac{1}{k} \to 0$. Beweis durch Gruppieren: $\frac{1}{3}+\frac{1}{4} \geq \frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8} \geq \frac{1}{2}$, usw.; also $s_{2^n} \geq 1+\frac{n}{2} \to \infty$. Wichtige Bausteine: Die **geometrische Reihe** $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ für $|q|$ (divergent für $|q| \geq 1$) und die **p-Reihe** $\sum \frac{1}{k^p}$, die genau für $p > 1$ konvergiert. Teleskopreihen wie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1$ berechnet man über die Partialsummen $s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$.

Vergleichskriterien

Definition: Vergleichskriterien

Eine Reihe heißt **absolut konvergent**, wenn $\sum |a_k|$ konvergiert. Dann konvergiert auch $\sum a_k$ (und man darf umordnen). **Majorantenkriterium:** Gilt $|a_k| \leq b_k$ für fast alle k und konvergiert $\sum b_k$, dann konvergiert $\sum a_k$ absolut. **Minorantenkriterium:** Gilt $a_k \geq b_k \geq 0$ und divergiert $\sum b_k$, so divergiert $\sum a_k$. Typische Vergleichsreihen sind die geometrische Reihe und $\sum \frac{1}{k^2}$ (konvergent, Summe $\frac{\pi^2}{6}$) beziehungsweise $\sum \frac{1}{k}$ (divergent).

Quotienten-, Wurzel- und Leibniz-Kriterium

Definition: Quotienten-, Wurzel- und Leibniz-Kriterium

Quotientenkriterium: Ist $\blacksquare$, so konvergiert $\sum a_k$ absolut für L und divergiert für $L > 1$. **Wurzelkriterium:** Ist $\sqrt[k]{|a_k|} \to L$, gilt dieselbe Aussage. Für $L = 1$ ist keine Entscheidung möglich ($\sum \frac{1}{k}$ divergiert, $\sum \frac{1}{k^2}$ konvergiert, beide haben $L = 1$). Das Quotientenkriterium eignet sich für Fakultäten und Potenzen, das Wurzelkriterium für k-te Potenzen. **Leibniz-Kriterium:** Ist (a_k) monoton fallend mit $a_k \to 0$, so konvergiert die alternierende Reihe $\sum (-1)^k a_k$, und für den Rest gilt $|s - s_n| \le a_{n+1}$. Beispiel: $\sum \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2$ konvergiert, aber nur **bedingt** (nicht absolut). Bei bedingt konvergenten Reihen kann eine Umordnung den Wert ändern (Riemannscher Umordnungssatz).

So gehst du vor: Konvergenz einer Reihe untersuchen

1. Nullfolgenkriterium prüfen: Gilt $a_k \not\to 0$, divergiert die Reihe.
2. Bei Fakultäten und Potenzen a^k das Quotientenkriterium, bei k-ten Potenzen das Wurzelkriterium anwenden.
3. Sonst mit $\sum \frac{1}{k^p}$ oder der geometrischen Reihe vergleichen (Majorante/Minorante).
4. Bei wechselnden Vorzeichen zuerst absolute Konvergenz, dann Leibniz-Kriterium prüfen.

Beispiel 1

$\sum_{k=0}^{\infty} 3\left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{3}{1-2/3} = 9$.

Beispiel 2 (Quotientenkriterium)

$a_k = \frac{k}{2^k}$: $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k+1}{2k} \to \frac{1}{2}$. Die Reihe konvergiert (Summe 2).

Beispiel 3 (Wurzelkriterium)

$a_k = \left(\frac{k}{2k+1}\right)^k$: $\sqrt[k]{a_k} = \frac{k}{2k+1} \to \frac{1}{2}$. Konvergenz.

Beispiel 4 (Majorante)

$\frac{1}{k^2+k+1} \le \frac{1}{k^2}$, und $\sum \frac{1}{k^2}$ konvergiert; also konvergiert auch $\sum \frac{1}{k^2+k+1}$.

Beispiel 5 (Entscheidungsbaum)

Gegeben ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^2+1}$. Es gilt $a_k \to 0$, also hilft das Nullfolgenkriterium nicht. Der Term verhält sich wie $\frac{1}{k}$: Für $k \geq 1$ ist $\frac{k+1}{k^2+1} \geq \frac{k}{2k^2} = \frac{1}{2k}$, denn $k+1 \geq k$ und $k^2+1 \leq 2k^2$. Nach dem Minorantenkriterium divergiert die Reihe, weil $\sum \frac{1}{2k}$ divergiert.

Grundlagen: Cauchy-Kriterium und Umordnung

Definition: Grundlagen: Cauchy-Kriterium und Umordnung

Eine Reihe $\sum a_k$ konvergiert genau dann, wenn sie dem **Cauchy-Kriterium** genügt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es N mit ■ für alle $n > m \geq N$. Dieses Kriterium benötigt den Grenzwert nicht und ist der Ausgangspunkt vieler Beweise. Absolut konvergente Reihen dürfen beliebig umgeordnet werden, ohne dass sich die Summe ändert; bei bedingt konvergenten Reihen kann man durch Umordnung jeden beliebigen Wert erreichen (Riemann). Auch das Produkt zweier absolut konvergenter Reihen darf gliedweise gebildet werden (Cauchy-Produkt): $(\sum a_k)\,(\sum b_k) = \sum_n \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Geometrische Reihen und Teleskopsummen

Nur wenige Reihen kann man exakt aufsummieren. Die beiden wichtigsten Typen sind die geometrische Reihe und die Teleskopreihe. Für $|q|$ gilt $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$, weil die Partialsummen $s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ wegen $q^{n+1} \to 0$ konvergieren; für $|q| \geq 1$ divergiert die Reihe. Beginnt die Summe nicht bei $k=0$, klammert man das erste Glied aus: $\sum_{k=m}^{\infty} q^k = \frac{q^m}{1-q}$. Bei einer **Teleskopreihe** lässt sich das Glied als Differenz $a_k = b_k - b_{k+1}$ schreiben. Dann heben sich in der Partialsumme fast alle Terme weg, und es bleibt $s_n = b_1 - b_{n+1}$.

Beispiel 6 (Teleskopreihe mit Partialbruchzerlegung)

Berechnen Sie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$.

Partialbruchzerlegung: $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Damit $s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$. Für $n \to \infty$ folgt $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$.

Beispiel 7 (Periodische Dezimalzahl)

Schreiben Sie ' als Bruch.

. Ebenso ist $0{,}\overline{9} = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = 1$: Die beiden Schreibweisen bezeichnen dieselbe reelle Zahl.

Die harmonische Reihe und die p-Reihen

Die harmonische Reihe $\sum \frac{1}{k}$ ist das wichtigste Gegenbeispiel der Analysis: Ihre Glieder bilden eine Nullfolge, trotzdem divergiert sie. Nikolaus von Oresme zeigte das im 14. Jahrhundert durch Gruppieren: $\frac{1}{3}+\frac{1}{4} \geq \frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8} \geq \frac{1}{2}$, allgemein liefert jeder Block von $2^{m-1}+1$ bis 2^m mindestens $\frac{1}{2}$. Also ist $s_{2^m} \geq 1+\frac{m}{2}$, und die Partialsummen sind unbeschränkt. Das Wachstum ist allerdings extrem langsam: Es gilt $s_n \approx \ln n + 0{,}5772$; um die Summe 10 zu überschreiten, braucht man mehr als $12\,000$ Summanden.

Satz: Konvergenz der p-Reihen

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ konvergiert für $p>1$ und divergiert für $p \leq 1$. Die p-Reihen sind die Standard-Vergleichsreihen: Verhält sich ein Glied für große k wie $\frac{c}{k^p}$, entscheidet der Exponent p. Begründen lässt sich der Satz mit dem Cauchyschen Verdichtungskriterium: Für fallende positive a_k konvergiert $\sum a_k$ genau dann, wenn $\sum 2^k a_{2^k}$ konvergiert, und für $a_k = k^{-p}$ ist das die geometrische Reihe mit $q = 2^{1-p}$.

Welches Kriterium wann?

In Übungen und Klausuren steht man vor einer Reihe und muss das passende Werkzeug wählen. Eine bewährte Reihenfolge erspart viele Umwege. Zuerst prüft man das notwendige Kriterium: Ist a_k keine Nullfolge, ist man fertig. Danach schaut man auf die Bauart des Glieds: Fakultäten und Exponentialterme sprechen für das Quotientenkriterium, k-te Potenzen für das Wurzelkriterium, gebrochen-rationale Ausdrücke und Wurzeln für einen Vergleich mit einer p-Reihe, wechselnde Vorzeichen für Leibniz.

So gehst du vor: Konvergenz einer Reihe untersuchen

1. Nullfolge? Wenn $a_k \not\to 0$: Divergenz, fertig.
2. Geometrisch oder teleskopierend? Dann direkt den Wert berechnen.
3. Fakultäten, c^k: Quotientenkriterium $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \to q$; $q<1$ konvergent, $q>1$ divergent.
4. Ausdrücke der Form $(\ldots)^k$: Wurzelkriterium $\sqrt[k]{|a_k|} \to q$.
5. Gebrochen-rational: höchste Potenzen vergleichen und eine p-Reihe als Majorante oder Minorante wählen.
6. Wechselnde Vorzeichen: Leibniz-Kriterium ($|a_k|$ monoton fallende Nullfolge) und zusätzlich absolute Konvergenz prüfen.
7. Bei $q=1$ sagen Quotienten- und Wurzelkriterium nichts aus – dann vergleichen.

Beispiel 8 (Grenzwertkriterium beim Vergleich)

Konvergiert $\sum \frac{2k+1}{k^3+5}$?

Für große k verhält sich das Glied wie $\frac{2k}{k^3} = \frac{2}{k^2}$. Genauer: $\frac{2k+1}{k^3+5} \leq \frac{2k+k}{k^3} = \frac{3}{k^2}$ für $k \geq 1$. Da $\sum \frac{3}{k^2}$ als p-Reihe mit $p=2$ konvergiert, konvergiert die Reihe nach dem Majorantenkriterium.

Absolute und bedingte Konvergenz

Eine Reihe heißt **absolut konvergent**, wenn $\sum |a_k|$ konvergiert; absolut konvergente Reihen sind auch konvergent. Konvergiert $\sum a_k$, aber nicht $\sum |a_k|$, spricht man von **bedingter Konvergenz**. Das Standardbeispiel ist die alternierende harmonische Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots = \ln 2$. Bei alternierenden Reihen liefert das Leibniz-Kriterium zugleich eine Fehlerschranke: Der Abstand zwischen Reihenwert und Partialsumme s_n ist höchstens das erste weggelassene Glied $|a_{n+1}|$. Der Unterschied zwischen beiden Konvergenzarten ist dramatisch. Absolut konvergente Reihen darf man beliebig umordnen, ohne den Wert zu ändern, und man darf sie gliedweise multiplizieren (Cauchy-Produkt). Bei bedingt konvergenten Reihen kann man nach dem **Riemannschen Umordnungssatz** durch geschicktes Umordnen jeden beliebigen Wert erzeugen.

Beispiel 9 (Fehlerabschätzung nach Leibniz)

Wie viele Glieder der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^3}$ braucht man für einen Fehler unter 10^{-3}?

Der Fehler nach n Gliedern ist höchstens $\frac{1}{(n+1)^3}$. Aus $\frac{1}{(n+1)^3}$ folgt $n + 1 > 10$, also genügen $n = 10$ Glieder. Die Partialsumme $s_{10} \approx 0{,}9011$ liegt dann weniger als $0{,}001$ vom Reihenwert $\frac{3}{4}\zeta(3) \approx 0{,}9015$ entfernt.

Ausblick: Reihen mit Variablen

Hängen die Glieder von einer Variablen x ab, so stellt sich die Konvergenzfrage für jedes x neu. Das wichtigste Beispiel ist die **Exponentialreihe** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Nach dem Quotientenkriterium gilt [redacted] für jedes feste x, die Reihe konvergiert also überall absolut. Ihr Wert ist e^x; für $x = 1$ erhält man die Eulersche Zahl $e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \cdots \approx 2{,}71828$. Schon zehn Glieder liefern sechs korrekte Nachkommastellen, weil die Fakultät im Nenner so schnell wächst. Bei der geometrischen Reihe $\sum x^k$ dagegen hängt die Konvergenz von x ab: Sie konvergiert genau für $|x|$. Solche Potenzreihen und ihre Konvergenzradien werden im Kapitel über Taylorreihen ausführlich untersucht; die Kriterien dieses Kapitels sind dort das wichtigste Werkzeug.

Achtung: Typische Fehler bei Reihen

„Die Glieder gehen gegen 0, also konvergiert die Reihe“ ist falsch – die harmonische Reihe ist das Gegenbeispiel. Beim Quotientenkriterium genügt nicht [redacted] für alle k; nötig ist eine feste Schranke q (bei $\sum \frac{1}{k}$ ist der Quotient stets kleiner als 1). Verwechseln Sie nicht Folge und Reihe: $\frac{1}{k} \to 0$, aber $\sum \frac{1}{k} = \infty$. Beim Vergleichskriterium muss die Ungleichung in die richtige Richtung zeigen: Eine konvergente Reihe taugt nur als Majorante, eine divergente nur als Minorante.

Wusstest du? Das Basler Problem

Dass $\sum \frac{1}{k^2}$ konvergiert, war im 17. Jahrhundert bekannt, den Wert kannte aber niemand. Die Brüder Bernoulli aus Basel scheiterten daran. Leonhard Euler fand 1734 das überraschende Ergebnis $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1{,}6449$ – die Kreiszahl taucht in einer Summe auf, die mit Kreisen nichts zu tun hat. Für $\sum \frac{1}{k^3}$ ist bis heute keine geschlossene Formel bekannt; Roger Apéry bewies 1979 immerhin, dass der Wert irrational ist.

Hinweis: Saubere Begründungen

Nennen Sie in jeder Konvergenzuntersuchung das verwendete Kriterium mit Namen und prüfen Sie seine Voraussetzungen ausdrücklich: Positivität beim Vergleich, Monotonie und Nullfolge bei Leibniz, eine Abschätzung „für alle $k \geq k_0$“ bei Majoranten. Bei Grenzwerten von Quotienten schreiben Sie die Rechnung bis zum Ende aus, statt nur das Ergebnis anzugeben. Wenn Sie eine Reihe auf einen Wert summieren sollen, überprüfen Sie das Ergebnis mit einer Partialsumme aus drei oder vier Gliedern: Sie muss in der Nähe des berechneten Wertes liegen und bei positiven Gliedern darunter. So fallen vergessene Anfangsglieder oder falsche Startindizes sofort auf. Bei Konvergenzbeweisen genügt dagegen keine numerische Rechnung, denn auch die harmonische Reihe sieht nach tausend Gliedern harmlos aus.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Reihe $\sum a_k$ = Grenzwert der Partialsummen $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$; geometrische Reihe $\sum_{k \geq 0} q^k = \frac{1}{1-q}$ für $|q|$.
- Notwendig: Konvergiert $\sum a_k$, so $a_k \to 0$; die Umkehrung ist falsch (harmonische Reihe).
- p-Reihen: $\sum \frac{1}{k^p}$ konvergiert genau für $p > 1$; sie dienen als Vergleichsreihen.
- Vergleich: $0 \leq a_k \leq b_k$ und $\sum b_k$ konvergent $\Rightarrow \sum a_k$ konvergent; $a_k \geq b_k \geq 0$ und $\sum b_k$ divergent $\Rightarrow$ divergent.
- Quotienten- und Wurzelkriterium: Grenzwert q konvergent, $q > 1$ divergent, $q = 1$ keine Aussage.
- Leibniz: Ist $|a_k|$ eine monoton fallende Nullfolge, konvergiert $\sum (-1)^k a_k$; Fehler $|s - s_n| \leq |a_{n+1}|$.
- Absolut konvergente Reihen darf man umordnen und multiplizieren; bedingt konvergente Reihen kann man auf jeden Wert umordnen (Riemann).

Achtung

Fehler Nummer eins: aus $a_k \to 0$ auf Konvergenz schließen. Fehler zwei: das Quotientenkriterium bei $L = 1$ als „konvergent“ lesen. Beim Leibniz-Kriterium wird oft die Monotonie vergessen. Und: $\sum |a_k|$ und $\sum a_k$ sind verschiedene Reihen.

Ottos Tipp

Prüfen Sie zuerst das Nullfolgenkriterium (schnelle Divergenz), dann $k!$ oder a^k im Term (Quotientenkriterium), dann Vergleich mit $\frac{1}{k^p}$; bei wechselndem Vorzeichen zuerst absolute Konvergenz testen, danach Leibniz.