Arbeitsblatt - Reihen und Konvergenzkriterien

Klasse: Studium 1 Semester · 20

Der Rechenweg muss angegeben werden.

Aufgabe 1

Aufgabe 1 – Geometrische Reihen

Berechnen Sie den Wert der Reihen. Geben Sie jeweils den Quotienten q und das erste Glied an.

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} 2\left(-\frac{1}{2}\right)^k$

c) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{5}{4^k}$

d) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^k$

Aufgabe 2

Aufgabe 2 – Teleskopreihen

Zerlegen Sie das Glied in eine Differenz und berechnen Sie Partialsummen und Reihenwert.

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)}$

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)$

Aufgabe 3

Aufgabe 3 – Das notwendige Kriterium

Untersuchen Sie, ob die Glieder eine Nullfolge bilden, und ziehen Sie, wenn möglich, eine Folgerung über die Reihe.

a) $\sum \frac{k}{k+1}$

b) $\sum \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$

c) $\sum \cos \frac{1}{k}$

d) $\sum \frac{1}{k}$

Aufgabe 4

Aufgabe 4 – Vergleichskriterium

Entscheiden Sie mit einer geeigneten Majorante oder Minorante. Geben Sie die Abschätzung ausdrücklich an.

a) $\sum \frac{1}{k^2+1}$
b) $\sum \frac{1}{\sqrt{k}}$
c) $\sum \frac{1}{2^k+k}$
d) $\sum_{k\geq 3} \frac{\ln k}{k}$

Aufgabe 5

Aufgabe 5 – Quotientenkriterium

Untersuchen Sie mit dem Quotientenkriterium. Berechnen Sie [redacted].

a) $\sum \frac{k}{2^k}$
b) $\sum \frac{3^k}{k!}$
c) $\sum \frac{k^2}{3^k}$
d) $\sum \frac{k!}{10^k}$

Aufgabe 6

Aufgabe 6 – Wurzelkriterium

Untersuchen Sie mit dem Wurzelkriterium. Berechnen Sie $q = \lim \sqrt[k]{|a_k|}$.

a) $\sum \left(\frac{k}{2k+1}\right)^k$
b) $\sum \left(1-\frac{1}{k}\right)^{k^2}$
c) $\sum \frac{2^k}{k^2}$

Aufgabe 7

Aufgabe 7 – Der springende Ball

Ein Ball fällt aus 2 m Höhe und springt nach jedem Aufprall auf $60\,\%$ der vorigen Höhe zurück. Luftwiderstand wird vernachlässigt; die Fallzeit aus der Höhe h ist $t = \sqrt{2h/g}$ mit $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$.

a) Wie hoch springt der Ball nach dem ersten, zweiten und dritten Aufprall?
b) Welche Gesamtstrecke legt der Ball zurück? Schreiben Sie sie als Reihe.
c) Berechnen Sie die Fallzeit t_0 aus 2 m.
d) Zeigen Sie, dass auch die Gesamtzeit endlich ist, und berechnen Sie sie. Beachten Sie, dass die Flugzeiten den Faktor $\sqrt{0{,}6}$ haben.

Aufgabe 8

Aufgabe 8 – Tägliche Medikamenteneinnahme

Eine Patientin nimmt jeden Morgen 100 mg eines Wirkstoffs ein. Nach 24 Stunden sind noch $40\,\%$ der vorhandenen Menge im Körper.

a) Welche Menge ist unmittelbar nach der zweiten und nach der dritten Einnahme im Körper?
b) Geben Sie die Menge unmittelbar nach der n-ten Einnahme als geometrische Summe und in geschlossener Form an.
c) Welcher Wert stellt sich langfristig ein? Wie viel Prozent davon sind nach der fünften Einnahme erreicht?
d) Wie hoch ist der Spiegel langfristig unmittelbar vor einer Einnahme?

Aufgabe 9

Aufgabe 9 – Periodische Dezimalzahlen

Jede periodische Dezimalzahl ist eine geometrische Reihe und damit eine rationale Zahl.

a) Zeigen Sie $0{,}\overline{9} = 1$.

b) Schreiben Sie $0{,}\overline{16}$ als Bruch.

c) Schreiben Sie $\quad'\quad$ als vollständig gekürzten Bruch.

d) Begründen Sie: Eine Zahl mit der Periodenlänge p ist ein Bruch mit dem Nenner $10^p - 1$ (eventuell mal einer Zehnerpotenz).

Aufgabe 10

Aufgabe 10 – Die Kochsche Schneeflocke

Man beginnt mit einem gleichseitigen Dreieck der Seitenlänge 1 (Fläche $A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$). In jedem Schritt wird jede Strecke gedrittelt und über dem mittleren Drittel ein gleichseitiges Dreieck nach außen aufgesetzt. Im n-ten Schritt kommen $3 \cdot 4^{n-1}$ neue Dreiecke mit der Fläche $\frac{A_0}{9^n}$ hinzu.

a) Wie viele Strecken hat die Figur nach n Schritten, und wie lang ist jede? Bestimmen Sie den Umfang U_n.
b) Zeigen Sie, dass $U_n \to \infty$.
c) Berechnen Sie die Gesamtfläche als Reihe.
d) Deuten Sie das Ergebnis: Was ist an dieser Figur bemerkenswert?

Aufgabe 11

Aufgabe 11 – Achilles und die Schildkröte

Achilles läuft 10 m/s, die Schildkröte 1 m/s; sie hat 100 m Vorsprung. Zenon zerlegt das Rennen in Etappen: Achilles läuft zum Startpunkt der Schildkröte, dann zu ihrer neuen

Position und so weiter.

a) Wie lang sind die ersten drei Etappen?
b) Welche Strecke läuft Achilles insgesamt bis zum Einholen? Berechnen Sie sie als Reihe.
c) Wie lange dauert es bis zum Einholen?
d) Bestätigen Sie das Ergebnis mit einer linearen Gleichung und erklären Sie, wo Zenons Denkfehler lag.

Aufgabe 12

Aufgabe 12 – Eine ewige Rente

Eine Stiftung soll einem Preisträger ab dem nächsten Jahr jährlich 1200 € auszahlen, für immer. Das Kapital wird mit $3\,\%$ pro Jahr verzinst. Der heutige Wert (Barwert) einer Zahlung in k Jahren ist $\frac{1200}{1{,}03^{k}}$.

a) Schreiben Sie den Barwert aller Zahlungen als Reihe.
b) Berechnen Sie den Wert der Reihe.
c) Welches Kapital braucht man für eine auf 30 Jahre begrenzte Rente? Vergleichen Sie.
d) Erklären Sie anschaulich, warum die ewige Rente nicht unendlich viel kostet.

Aufgabe 13

Aufgabe 13 – Warten auf die Sechs

Ein fairer Würfel wird so lange geworfen, bis zum ersten Mal eine Sechs fällt. Die Wahrscheinlichkeit, dass dies genau im k-ten Wurf geschieht, ist $p_k = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$.

a) Zeigen Sie $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$.
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, in den ersten sechs Würfen mindestens eine Sechs zu werfen?
c) Leiten Sie aus $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ durch gliedweises Ableiten die Formel $\sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ her (für $|x|$).
d) Berechnen Sie die erwartete Anzahl der Würfe $\sum k p_k$.
e) Wie wahrscheinlich ist es, dass man mehr als zehn Würfe braucht?

Aufgabe 14

Aufgabe 14 – Wie schnell nähert sich die Summe?

Die alternierende harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ hat den Wert $\ln 2 \approx 0{,}6931$. Die Leibniz-Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ hat den Wert $\frac{\pi}{4}$.

a) Begründen Sie die Konvergenz beider Reihen mit dem Leibniz-Kriterium.
b) Berechnen Sie s_4 der ersten Reihe und vergleichen Sie den tatsächlichen Fehler mit der Leibniz-Schranke.
c) Wie viele Glieder garantieren einen Fehler unter $0{,}001$?

d) Berechnen Sie 4 mal die Summe der ersten zehn Glieder der Leibniz-Reihe. Warum benutzt man diese Reihe nicht, um π zu berechnen?

Aufgabe 15

Aufgabe 15 – Verdichtung und p-Reihen

Das Cauchysche Verdichtungskriterium lautet: Ist (a_k) positiv und monoton fallend, so konvergiert $\sum a_k$ genau dann, wenn $\sum 2^k a_{2^k}$ konvergiert.

a) Wenden Sie es auf $a_k = \frac{1}{k^p}$ an und zeigen Sie: Die Reihe konvergiert genau für $p > 1$.

b) Untersuchen Sie $\sum_{k \geq 2} \frac{1}{k \ln k}$.

c) Untersuchen Sie $\sum_{k \geq 2} \frac{1}{k (\ln k)^2}$.

d) Erklären Sie mit der Idee der Gruppierung (wie bei Oresme), warum das Kriterium gilt.

Aufgabe 16

Aufgabe 16 – Der überhängende Bücherstapel

Stapelt man n Bücher der Länge 1 optimal, so ragt das oberste um $\frac{1}{2} H_n$ über die Tischkante, wobei $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ die n-te harmonische Zahl ist.

n	**10**	**100**	**1000**
H_n	2,929	5,187	7,485
$\ln n + 0{,}5772$	2,880	5,182	7,485

a) Ab wie vielen Büchern ragt das oberste Buch vollständig über die Tischkante (Überhang größer als 1)?

b) Wie viele Bücher braucht man für einen Überhang von mehr als 2 Buchlängen? Benutzen Sie $H_{30} \approx 3{,}995$ und $H_{31} \approx 4{,}027$.

c) Schätzen Sie mit $H_n \approx \ln n + 0{,}5772$ ab, wie viele Bücher man für einen Überhang von 5 Buchlängen bräuchte.

d) Beweisen Sie mit Oresmes Gruppierung, dass der Überhang beliebig groß werden kann.

e) Was spricht in der Praxis gegen einen beliebig großen Überhang?

Aufgabe 17

Aufgabe 17 – Umordnen verändert die Summe

Die alternierende harmonische Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ konvergiert gegen $\ln 2$. Wir ordnen sie so um, dass auf jedes positive Glied zwei negative folgen:
$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots$

a) Zeigen Sie, dass in der Umordnung jedes Glied der ursprünglichen Reihe genau einmal vorkommt.

b) Fassen Sie jeweils das positive Glied mit dem direkt folgenden negativen

zusammen: $\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{8}+\ldots$ Zeigen Sie $\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}=\frac{1}{4k-2}$.
c) Folgern Sie, dass die umgeordnete Reihe den Wert $\frac{1}{2}\ln 2$ hat.
d) Warum ist das kein Widerspruch zum Kommutativgesetz der Addition?
e) Warum kann so etwas bei $\sum \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$ nicht passieren?

Aufgabe 18

Aufgabe 18 – Absolut oder bedingt?

Entscheiden Sie, ob die Reihe absolut konvergiert, bedingt konvergiert oder divergiert.

a) $\sum \frac{(-1)^k}{k^2}$
b) $\sum \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$
c) $\sum \frac{\sin k}{k^2}$
d) $\sum (-1)^k \frac{k}{k^2+1}$
e) $\sum (-1)^k \frac{k}{k+1}$

Aufgabe 19

Aufgabe 19 – Reihen multiplizieren

Für absolut konvergente Reihen gilt das Cauchy-Produkt
$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ mit $c_n=\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

a) Berechnen Sie das Cauchy-Produkt von $\sum x^k$ mit sich selbst ($|x|$) und folgern Sie $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=\frac{1}{(1-x)^2}$.
b) Berechnen Sie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}$ und $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$.
c) Zeigen Sie mit dem binomischen Satz, dass das Cauchy-Produkt der Exponentialreihen $\sum \frac{x^k}{k!}$ und $\sum \frac{y^k}{k!}$ die Reihe $\sum \frac{(x+y)^n}{n!}$ ergibt.
d) Welche Funktionalgleichung der Exponentialfunktion ist damit bewiesen?

Aufgabe 20

Aufgabe 20 – Knobelaufgabe: Eingrenzen von π²/6

Euler fand $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$. Ohne diese Formel kann man den Wert mit Teleskopsummen erstaunlich gut eingrenzen.

a) Zeigen Sie $\frac{1}{k(k+1)}$ für $k\geq 2$.
b) Folgern Sie $\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ und $\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}>\frac{1}{n+1}$.
c) Zeigen Sie damit $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$.
d) Berechnen Sie s_{10} und geben Sie ein Intervall der Länge kleiner als $0{,}01$ an, in dem der Reihenwert liegt. Liegt $\frac{\pi^2}{6}$ darin?