Lösungen - Reihen und Konvergenzkriterien

Klasse: Studium 1 Semester

Lösung zu Aufgabe 1

a) $q = \frac{1}{3}$, erstes Glied 1: $\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$.

b) Erstes Glied $2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$, $q = -\frac{1}{2}$: $\frac{-1}{1+\frac{1}{2}} = -\frac{2}{3}$.

c) Erstes Glied $\frac{5}{16}$, $q = \frac{1}{4}$: $\frac{5/16}{3/4} = \frac{5}{12}$.

d) $q = \frac{3}{2} > 1$: Die Glieder wachsen, die Reihe divergiert (gegen $+\infty$).

Erläuterung: Für jede geometrische Reihe gilt die Merkregel „Wert gleich erstes Glied geteilt durch eins minus Quotient“, sofern der Betrag des Quotienten kleiner als eins ist. Den Quotienten erhält man, indem man ein Glied durch das vorige teilt. Beginnt die Reihe nicht bei $k = 0$, muss man das erste Glied sorgfältig bestimmen; das ist die häufigste Fehlerquelle.

Lösung zu Aufgabe 2

a) $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$; $s_n = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$.

b) $\frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$. Es bleiben die ersten beiden positiven und die letzten beiden negativen Terme: $s_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \to \frac{3}{4}$.

c) $s_n = \sqrt{n+1} - 1 \to \infty$: divergent, obwohl die Glieder $\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$ gegen 0 gehen.

Erläuterung: Teleskopreihen erkennt man daran, dass sich das Glied als Differenz zweier Werte einer Folge schreiben lässt; oft hilft eine Partialbruchzerlegung. In der Partialsumme bleiben nur die Randterme stehen. Konvergiert die Folge der Randterme, konvergiert die Reihe. Beispiel c) zeigt, dass Glieder, die gegen null gehen, dafür nicht ausreichen.

Lösung zu Aufgabe 3

a) $\frac{k}{k+1} \to 1 \neq 0$: divergent.

b) $\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \to e \neq 0$: divergent.

c) $\cos\frac{1}{k} \to \cos 0 = 1$: divergent.

d) $\frac{1}{k} \to 0$: Das Kriterium liefert keine Aussage. Die Reihe divergiert trotzdem (harmonische Reihe).

Erläuterung: Das notwendige Kriterium ist ein schneller erster Test: Bilden die Glieder keine Nullfolge, kann die Reihe nicht konvergieren, denn jede Partialsumme unterscheidet sich von der vorigen um ein Glied. Gehen die Glieder gegen null, ist dagegen noch nichts entschieden, wie die harmonische Reihe zeigt.

Lösung zu Aufgabe 4

a) 0; $\sum \frac{1}{k^2}$ konvergiert: konvergent.
b) $\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{k}$; $\sum \frac{1}{k}$ divergiert: divergent (p-Reihe mit $p = \frac{1}{2}$).
c) 0, geometrische Majorante: konvergent.
d) Für $k \geq 3$ ist $\ln k > 1$, also $\frac{\ln k}{k} > \frac{1}{k}$: divergente Minorante, divergent.
Erläuterung: Beim Vergleich schätzt man das Glied durch einen einfacheren Ausdruck ab, dessen Reihe man kennt. Für Konvergenz braucht man eine konvergente Reihe mit größeren Gliedern (Majorante), für Divergenz eine divergente Reihe mit kleineren Gliedern (Minorante). Die Richtung der Ungleichung entscheidet, welches Kriterium anwendbar ist.

Lösung zu Aufgabe 5

a) $\frac{k+1}{2^{k+1}} \cdot \frac{2^k}{k} = \frac{k+1}{2k} \to \frac{1}{2}$: konvergent.
b) $\frac{3^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{3^k} = \frac{3}{k+1} \to 0$: konvergent (Wert $e^3 - 1$ ab $k = 1$).
c) $\frac{(k+1)^2}{3k^2} \to \frac{1}{3}$: konvergent.
d) $\frac{k+1}{10} \to \infty > 1$: divergent.
Erläuterung: Das Quotientenkriterium vergleicht die Reihe mit einer geometrischen Reihe. Es ist besonders geeignet, wenn Fakultäten oder Potenzen mit fester Basis vorkommen, weil sich im Quotienten aufeinanderfolgender Glieder fast alles kürzt. Man vereinfacht den Quotienten zuerst und bildet dann den Grenzwert. Liegt er unter eins, konvergiert die Reihe, liegt er über eins, divergiert sie.

Lösung zu Aufgabe 6

a) $\sqrt[k]{a_k} = \frac{k}{2k+1} \to \frac{1}{2}$: konvergent.
b) $\sqrt[k]{a_k} = \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k \to \frac{1}{e}$: konvergent.
c) $\sqrt[k]{a_k} = \frac{2}{(\sqrt[k]{k})^2} \to 2 > 1$: divergent (die Glieder wachsen sogar über alle Grenzen).
Erläuterung: Das Wurzelkriterium ist die erste Wahl, wenn das ganze Glied eine k-te Potenz ist; die k-te Wurzel hebt die Potenz dann auf. Man benutzt dabei bekannte Grenzwerte wie $\sqrt[k]{k} \to 1$ und $\left(1 - \frac{1}{k}\right)^k \to \frac{1}{e}$. Wie beim Quotientenkriterium entscheidet der Vergleich des Grenzwerts mit eins.

Lösung zu Aufgabe 7

a) $1{,}2$ m, $0{,}72$ m, $0{,}432$ m.
b) $2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} 2 \cdot 0{,}6^k = 2 + 2 \cdot \frac{1{,}2}{0{,}4} = 2 + 6 = 8$ m (jede Sprunghöhe wird hinauf und hinunter durchlaufen).
c) $t_0 = \sqrt{4/9{,}81} \approx 0{,}6386$ s.
d) Der k-te Sprung dauert $2t_0(\sqrt{0{,}6})^k$. Gesamtzeit

$t_0\left(1+\frac{2\sqrt{0{,}6}}{1-\sqrt{0{,}6}}\right)\approx 0{,}6386\cdot 7{,}873\approx 5{,}03$ s. Unendlich viele Sprünge passen in rund fünf Sekunden.
Erläuterung: Die Sprunghöhen bilden eine geometrische Folge mit dem Faktor $0{,}6$, die Flugzeiten eine geometrische Folge mit dem Faktor $\sqrt{0{,}6}$, weil die Fallzeit mit der Wurzel der Höhe wächst.

Lösung zu Aufgabe 8

a) $100+40=140$ mg; $100+0{,}4\cdot 140=156$ mg.
b) $M_n=100\sum_{k=0}^{n-1}0{,}4^k=100\cdot\frac{1-0{,}4^n}{0{,}6}$.
c) $M_\infty=\frac{100}{0{,}6}\approx 166{,}67$ mg. $M_5=164{,}96$ mg, das sind $98{,}98\,\%$ davon.
d) $0{,}4\cdot M_\infty\approx 66{,}67$ mg. Der Spiegel pendelt also zwischen etwa 67 und 167 mg.
Erläuterung: Der Spiegel nähert sich dem Gleichgewicht, bei dem der tägliche Abbau genau die neue Dosis ausgleicht: $0{,}6\cdot M=100$.

Lösung zu Aufgabe 9

a) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{9}{10^k}=\frac{9/10}{1-1/10}=1$.
b) $0{,}1+\frac{6}{100}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10}}=\frac{1}{10}+\frac{6}{90}=\frac{9}{90}+\frac{6}{90}=\frac{15}{90}=\frac{1}{6}$.
c) $2{,}3+\frac{45}{1000}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{100}}=\frac{23}{10}+\frac{45}{990}=\frac{23}{10}+\frac{1}{22}=\frac{253+5}{110}=\frac{258}{110}=\frac{129}{55}$.
d) Ein Block P mit p Ziffern wiederholt sich: $P\sum_{k\ge 1}10^{-pk}=\frac{P}{10^p-1}$. Eine Vorperiode verschiebt das Komma, also um eine Zehnerpotenz.
Erläuterung: Die Periode bildet die Glieder einer geometrischen Reihe mit dem Quotienten 10^{-p}, wobei p die Periodenlänge ist. Eine Vorperiode schreibt man als gewöhnliche endliche Dezimalzahl und addiert den periodischen Teil. Umgekehrt hat jede rationale Zahl eine abbrechende oder periodische Dezimaldarstellung.

Lösung zu Aufgabe 10

a) $3\cdot 4^n$ Strecken der Länge 3^{-n}; $U_n=3\left(\frac{4}{3}\right)^n$.
b) Geometrische Folge mit $q=\frac{4}{3}>1$: $U_n\to\infty$.
c) $A=A_0\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot 4^{n-1}}{9^n}\right)=A_0\left(1+\frac{1/3}{1-4/9}\right)=A_0\left(1+\frac{3}{5}\right)=\frac{8}{5}A_0\approx 0{,}6928$.
d) Die Schneeflocke hat einen unendlich langen Rand, umschließt aber eine endliche Fläche, nur $60\,\%$ mehr als das Ausgangsdreieck.
Erläuterung: Der Umfang wächst bei jedem Schritt um den Faktor $\frac{4}{3}$, die Fläche nimmt dagegen um immer kleinere Beträge zu.

Lösung zu Aufgabe 11

a) 100 m, 10 m, 1 m.
b) $\sum_{k=0}^{\infty}100\cdot 0{,}1^k=\frac{100}{0{,}9}\approx 111{,}11$ m.

c) $\frac{111{,}11}{10} \approx 11{,}11$ s.
d) $10t = 100 + t$ liefert $t = \frac{100}{9}$ s. Unendlich viele Etappen können zusammen eine endliche Zeit dauern – genau das zeigt die Konvergenz der Reihe.
Erläuterung: Jede Etappe ist ein Zehntel der vorigen. Die Summe einer unendlichen geometrischen Reihe ist endlich, und genau das löst das Paradoxon auf.

Lösung zu Aufgabe 12

a) $\sum_{k=1}^{\infty} 1200 \cdot 1{,}03^{-k}$.
b) Geometrische Reihe mit erstem Glied $\frac{1200}{1{,}03}$ und $q = \frac{1}{1{,}03}$: $\frac{1200/1{,}03}{1-1/1{,}03} = \frac{1200}{0{,}03} = 40\,000$ €.
c) $1200 \cdot \frac{1-1{,}03^{-30}}{0{,}03} \approx 23\,520{,}53$ €, also gut die Hälfte.
d) $40\,000$ € bringen jedes Jahr genau 1200 € Zinsen. Man zahlt nur die Zinsen aus, das Kapital bleibt unangetastet.
Erläuterung: Spätere Zahlungen sind heute weniger wert, weil man das Geld bis dahin verzinsen könnte. Deshalb fallen die Barwerte geometrisch, und die Summe bleibt endlich.

Lösung zu Aufgabe 13

a) $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-5/6} = 1$.
b) $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 0{,}6651$.
c) Potenzreihen dürfen im Inneren des Konvergenzbereichs gliedweise differenziert werden: $\frac{d}{dx}\sum x^k = \sum k x^{k-1}$ und $\frac{d}{dx}\frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2}$.
d) $\sum k \cdot \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{(1/6)^2} = 6$ Würfe.
e) Mehr als zehn Würfe heißt: Die ersten zehn sind keine Sechs: $\left(\frac{5}{6}\right)^{10} \approx 0{,}1615$.
Erläuterung: Aus der Formel für die Erwartung liest man ab: Bei einer Erfolgswahrscheinlichkeit p wartet man im Mittel $\frac{1}{p}$ Versuche.

Lösung zu Aufgabe 14

a) $\frac{1}{k}$ und $\frac{1}{2k+1}$ sind monoton fallende Nullfolgen, die Vorzeichen wechseln.
b) $s_4 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12} \approx 0{,}5833$. Fehler $\ln 2 - s_4 \approx 0{,}1098$, Schranke $\frac{1}{5} = 0{,}2$.
c) $\frac{1}{n+1}$. Man braucht 1000 Glieder – sehr langsame Konvergenz.
d) $4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots - \frac{1}{19}\right) \approx 3{,}0418$. Nach zehn Gliedern stimmt erst die erste Stelle; für sechs Stellen bräuchte man Millionen Glieder.
Erläuterung: Die Leibniz-Schranke ist eine obere Grenze für den Fehler; der tatsächliche Fehler ist meist etwa halb so groß.

Lösung zu Aufgabe 15

a) $2^k a_{2^k} = 2^k \cdot 2^{-kp} = (2^{1-p})^k$. Geometrisch, konvergent genau für 2^{1-p}, also $p > 1$.

b) $2^k \cdot \frac{1}{2^k \cdot k \ln 2} = \frac{1}{k \ln 2}$: harmonisch, divergent.
c) $2^k \cdot \frac{1}{2^k k^2 (\ln 2)^2} = \frac{1}{(\ln 2)^2 k^2}$: konvergent.
d) Der Block $a_{2^k} + \cdots + a_{2^{k+1}-1}$ hat 2^k Glieder, alle zwischen $a_{2^{k+1}}$ und a_{2^k}. Die Blocksumme liegt daher zwischen $\frac{1}{2} \cdot 2^{k+1} a_{2^{k+1}}$ und $2^k a_{2^k}$. Damit lassen sich die Reihen gegenseitig abschätzen.
Erläuterung: Die Verdichtung ersetzt eine schwierige Reihe durch eine Reihe, in der nur Glieder mit Zweierpotenz-Index vorkommen, jeweils gewichtet mit der Blocklänge.

Lösung zu Aufgabe 16

a) $\frac{1}{2} H_n > 1 \iff H_n > 2$. $H_3 = 1{,}833$, $H_4 = \frac{25}{12} \approx 2{,}083$: ab 4 Büchern.
b) $H_n > 4$: H_{30}, also 31 Bücher.
c) $\ln n + 0{,}5772 > 10 \iff n > e^{9{,}4228} \approx 12\,367$. Etwa $12\,400$ Bücher.
d) $H_{2^m} \geq 1 + \frac{m}{2}$, denn jeder Block $\frac{1}{2^{j-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^j}$ hat 2^{j-1} Summanden, die alle $\geq \frac{1}{2^j}$ sind, und liefert damit mindestens $\frac{1}{2}$. Also ist H_n unbeschränkt.
e) Die Bücher müssten exakt positioniert sein; kleine Störungen und das Biegen der Bücher bringen den Stapel lange vorher zum Kippen. Außerdem wächst der Überhang nur logarithmisch.

Lösung zu Aufgabe 17

a) Die positiven Glieder $\frac{1}{2k-1}$ erscheinen der Reihe nach, die negativen $\frac{1}{2m}$ ebenfalls der Reihe nach, nur in anderem Tempo. Keines wird ausgelassen oder doppelt verwendet.
b) $\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2(2k-1)} = \frac{1}{2(2k-1)} = \frac{1}{4k-2}$.
c) Die Reihe wird zu $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots\right) = \frac{1}{2} \ln 2$.
d) Das Kommutativgesetz gilt für endlich viele Summanden. Eine Reihe ist ein Grenzwert, und die Reihenfolge bestimmt die Partialsummen. Bei bedingter Konvergenz ändert die Umordnung diesen Grenzwert.
e) Diese Reihe konvergiert absolut ($\sum \frac{1}{k^2}$). Absolut konvergente Reihen haben bei jeder Umordnung denselben Wert.

Lösung zu Aufgabe 18

a) $\sum \frac{1}{k^2}$ konvergiert: absolut konvergent.
b) Leibniz: $\frac{1}{\sqrt{k}}$ fällt monoton gegen 0, konvergent. $\sum \frac{1}{\sqrt{k}}$ divergiert: bedingt konvergent.
c) [redacted]: absolut konvergent (die Vorzeichen wechseln unregelmäßig, trotzdem kein Problem).
d) $\frac{k}{k^2+1}$ ist für $k \geq 1$ monoton fallend ($\frac{d}{dx} \frac{x}{x^2+1} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \leq 0$) und eine Nullfolge: konvergent. $\frac{k}{k^2+1} \geq \frac{1}{2k}$: nicht absolut. Bedingt konvergent.
e) [redacted]: keine Nullfolge, divergent.

Lösung zu Aufgabe 19

a) $c_n = \sum_{k=0}^{n} x^k x^{n-k} = (n+1)x^n$. Also $\sum (n+1)x^n = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x}$.
b) Mit $x = \frac{1}{2}$: $\sum \frac{n+1}{2^n} = 4$. Dann $\sum \frac{n}{2^n} = 4 - \sum \frac{1}{2^n} = 4 - 2 = 2$.
c) $c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \frac{(x+y)^n}{n!}$.
d) $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$. Die Exponentialreihe konvergiert für alle x absolut, deshalb ist das Cauchy-Produkt erlaubt.
Erläuterung: Beim Cauchy-Produkt sammelt man alle Produkte $a_k b_l$ mit derselben Indexsumme $k + l = n$. Für absolut konvergente Reihen hat das Ergebnis den richtigen Wert, egal wie man die Produkte anordnet.

Lösung zu Aufgabe 20

a) $k(k-1)$ für $k \geq 2$, Kehrwerte drehen die Ungleichung um.
b) Teleskop: $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{n}$ und $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n+1}$. Mit a) folgen die Abschätzungen.
c) Mit $n = 1$: $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$.
d) $s_{10} \approx 1{,}5498$. Der Wert liegt zwischen $s_{10} + \frac{1}{11} \approx 1{,}6407$ und $s_{10} + \frac{1}{10} \approx 1{,}6498$. $\frac{\pi^2}{6} \approx 1{,}6449$ liegt darin.
Erläuterung: Die Idee ist, die schwierige Reihe zwischen zwei Teleskopreihen einzuklemmen, deren Summen man exakt kennt. So erhält man sichere Schranken, ohne den Wert selbst zu kennen.