Lösungen zur Klassenarbeit - Mengen, Relationen und Abbildungen

Klasse: Studium 1 Semester · Dauer: 60 Minuten · /20

Lösung zu Aufgabe 1 (4 BE/Punkte)

a) $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ (2 P.).
b) $A \cap B = B$, $A \setminus B = \{3\}$, $|\mathcal{P}(B)| = 2^5 = 32$ (2 P.).
Bei der Beschreibung durch Eigenschaften setzt man alle ganzen Zahlen des Bereichs einzeln ein: Für B erfüllen nur die Zahlen mit Quadrat kleiner als fünf die Bedingung, also -2 bis 2. Da B vollständig in A liegt, ist der Schnitt gleich B. Die Potenzmenge einer Menge mit fünf Elementen hat 2^5 Elemente.

Lösung zu Aufgabe 2 (4 BE/Punkte)

a) Reflexiv: $0 = 3 \cdot 0$. Symmetrisch: $b - a = -(a - b)$. Transitiv: $a - c = (a - b) + (b - c)$ ist Summe zweier Vielfacher von 3 (3 P.).
b) $[0], [1], [2]$ nach dem Rest; $-10 = 3 \cdot (-4) + 2$, also $-10 \in [2]$ (1 P.).
Für jede der drei Eigenschaften wird die Definition ausgeschrieben und die Differenz $a - b$ als Vielfaches von drei dargestellt. Die Klassen sind die drei Restklassen; eine Zahl gehört in die Klasse ihres Restes bei Division durch drei. Bei negativen Zahlen muss der Rest zwischen null und zwei liegen, deshalb schreibt man $-10 = 3 \cdot (-4) + 2$.

Lösung zu Aufgabe 3 (5 BE/Punkte)

a) Aus $\frac{2x_1+1}{x_1-1} = \frac{2x_2+1}{x_2-1}$ folgt nach Ausmultiplizieren $-2x_1 + x_2 = -2x_2 + x_1$, also $3x_2 = 3x_1$ (2 P.).
b) $y = \frac{2x+1}{x-1} \iff x = \frac{y+1}{y-2}$, definiert für $y \neq 2$ und $\neq 1$; $f^{-1}(y) = \frac{y+1}{y-2}$ (2 P.).
c) $f^{-1}(5) = \frac{6}{3} = 2$; $f(2) = \frac{5}{1} = 5$ (1 P.).
Für die Injektivität multipliziert man über Kreuz aus und vereinfacht; die quadratischen Terme heben sich auf. Für die Surjektivität löst man nach x auf und prüft, dass das Ergebnis im Definitionsbereich liegt, also nicht gleich eins ist. Die Probe mit $y = 5$ zeigt, dass Abbildung und Umkehrabbildung zueinander passen.

Lösung zu Aufgabe 4 (4 BE/Punkte)

a) $|P \cup S| = 120 + 90 - 40 = 170$; keins: 30 (2 P.).
b) $90 - 40 = 50$ (1 P.).
c) $170 - 40 = 130$ (1 P.).
Nach Inklusion und Exklusion werden die Studierenden mit beiden Gerichten zunächst doppelt gezählt und einmal abgezogen. Die Anzahl ohne Gericht ist das Komplement der Vereinigung. In c) zählt man genau ein Gericht: alle in der Vereinigung außer denen im Schnitt. Ein Venn-Diagramm mit den Bereichen 80, 40 und 50 bestätigt die

Rechnung.

Lösung zu Aufgabe 5 (3 BE/Punkte)

(3 P.).
Ein Elementbeweis beginnt mit einem beliebigen Element und übersetzt jeden Mengenbegriff in Logik: Komplement als Negation, Vereinigung als Oder, Schnitt als Und. Die entscheidende Stelle ist die Regel von De Morgan für Aussagen. Da alle Schritte Äquivalenzen sind, sind beide Inklusionen zugleich bewiesen.