Lernzettel - Mengen, Relationen und Abbildungen

Klasse: Studium 1 Semester

Einstieg: Die Sprache der Mathematik

Eine Universitätsbibliothek ordnet jedem Buch eine Signatur zu, jede Signatur gehört zu genau einem Regal, und Bücher mit gleicher Fachgruppe stehen zusammen. In dieser alltäglichen Organisation stecken die drei Grundbegriffe dieses Kapitels: Die Bücher bilden eine *Menge*, „steht in derselben Fachgruppe wie“ ist eine *Relation*, und die Zuordnung Buch $\mapsto$ Regal ist eine *Abbildung*. Fast jede Definition im Studium – vom Vektorraum bis zur stetigen Funktion – wird in dieser Sprache formuliert. Wer Mengen, Relationen und Abbildungen sicher beherrscht, kann Definitionen präzise lesen und Beweise sauber aufschreiben.

Mengen und Mengenoperationen

Definition: Mengen und Mengenoperationen

Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung verschiedener Objekte, der *Elemente*. Man schreibt $x \in M$, wenn x Element von M ist. A heißt **Teilmenge** von B ($A \subseteq B$), wenn aus $x \in A$ stets $x \in B$ folgt. Zwei Mengen sind gleich, wenn jede Teilmenge der anderen ist: $A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A$. Die wichtigsten Operationen: **Schnitt** $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$, **Vereinigung** $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$, **Differenz** $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ und, bezogen auf eine Grundmenge G, das **Komplement** $A^c = G \setminus A$. Es gelten die Gesetze von De Morgan: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ und $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$, sowie die Distributivgesetze $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Merke

Die **Potenzmenge** $\mathcal{P}(M)$ ist die Menge aller Teilmengen von M; hat M genau n Elemente, so hat $\mathcal{P}(M)$ genau 2^n Elemente. Das **kartesische Produkt** $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ besteht aus allen geordneten Paaren und hat $|A| \cdot |B|$ Elemente. Für endliche Mengen gilt die Formel $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Relationen und Äquivalenzrelationen

Definition: Relationen und Äquivalenzrelationen

Eine **Relation** auf M ist eine Teilmenge $R \subseteq M \times M$; man schreibt $a \sim b$ für $(a, b) \in R$. Eine Relation heißt *reflexiv*, wenn $a \sim a$ für alle a, *symmetrisch*, wenn

$a \sim b \Rightarrow b \sim a$, und *transitiv*, wenn $a \sim b \wedge b \sim c \Rightarrow a \sim c$. Sind alle drei Eigenschaften erfüllt, liegt eine **Äquivalenzrelation** vor. Die **Äquivalenzklasse** von a ist $[a] = \{b \mid b \sim a\}$. Verschiedene Klassen sind disjunkt, und ihre Vereinigung ist ganz M (Zerlegung). Typisches Beispiel: Kongruenz modulo n auf $\mathbb{Z}$ mit den n Restklassen. Eine **Ordnungsrelation** ist reflexiv, antisymmetrisch ($a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b$) und transitiv, etwa $\leq$ auf $\mathbb{R}$.

Abbildungen

Definition: Abbildungen

Eine **Abbildung** (Funktion) $f : A \to B$ ordnet jedem $a \in A$ genau ein $f(a) \in B$ zu. A ist der Definitionsbereich, B der Wertebereich (Zielmenge). Für $A' \subseteq A$ heißt $f(A') = \{f(a) \mid a \in A'\}$ das **Bild**, für $B' \subseteq B$ heißt $f^{-1}(B') = \{a \in A \mid f(a) \in B'\}$ das **Urbild** (das ist unabhängig davon, ob f umkehrbar ist). Eine Abbildung heißt

Merke

- **injektiv**, wenn verschiedene Elemente verschiedene Bilder haben: $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$;
- **surjektiv**, wenn jedes $b \in B$ getroffen wird: $f(A) = B$;
- **bijektiv**, wenn sie injektiv und surjektiv ist. Dann gibt es die **Umkehrabbildung** $f^{-1} : B \to A$ mit $f^{-1}(f(x)) = x$.

Merke

Die **Komposition** $g \circ f$ ist durch $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ definiert. Sie ist assoziativ, aber im Allgemeinen nicht kommutativ. Sind f und g injektiv (surjektiv), so auch $g \circ f$.

So gehst du vor: Injektiv, surjektiv, Äquivalenzrelation prüfen

1. Injektiv: $f(x) = f(y)$ ansetzen und $x = y$ folgern.
2. Surjektiv: $f(x) = y$ nach x auflösen und prüfen, ob x im Definitionsbereich liegt.
3. Äquivalenzrelation: Reflexivität, Symmetrie und Transitivität einzeln nachweisen.
4. Mengengleichheit: beide Inklusionen $\subseteq$ zeigen.

Beispiel 1

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$. Nicht injektiv, denn $f(-2) = f(2) = 4$. Nicht surjektiv, denn -1 wird nicht getroffen. Das Bild ist $[0; \infty)$. Das Urbild von $[1; 4]$ ist $[-2; -1] \cup [1; 2]$. Schränkt man ein auf $f : [0; \infty) \to [0; \infty)$, so ist f bijektiv mit Umkehrung $\sqrt{\ }$.

Beispiel 2

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x + 3$ ist bijektiv. Injektiv: $2x + 3 = 2y + 3 \Rightarrow x = y$. Surjektiv: Zu y wähle $x = \frac{y-3}{2}$. Umkehrabbildung: $f^{-1}(y) = \frac{y-3}{2}$.

Beispiel 3

Auf $\mathbb{Z}$ sei $a \sim b :\iff 3 \mid (a - b)$. Reflexiv: $3 \mid 0$. Symmetrisch: $3 \mid (a - b) \Rightarrow 3 \mid (b - a)$. Transitiv: $a - c = (a - b) + (b - c)$ ist durch 3 teilbar. Es gibt drei Klassen $[0], [1], [2]$.

Beispiel 4 (Elementbeweis)

Zu zeigen: $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$. Es gilt
$x \in A \setminus (B \cup C) \iff x \in A \wedge \neg(x \in B \vee x \in C) \iff x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C \iff x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
. Jeder Schritt ist eine Äquivalenz, daher genügt eine Kette ohne zwei getrennte Inklusionen.

Merkkasten

Für endliche Mengen mit gleich vielen Elementen $|A| = |B|$ gilt: $f : A \to B$ ist injektiv $\iff$ surjektiv $\iff$ bijektiv. Für unendliche Mengen stimmt das nicht: $n \mapsto 2n$ auf $\mathbb{N}$ ist injektiv, aber nicht surjektiv. Eine Menge heißt abzählbar, wenn es eine Bijektion zu $\mathbb{N}$ gibt; $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind abzählbar, $\mathbb{R}$ nicht (Cantors Diagonalverfahren).

Rechnen mit Mengen

Für Mengen A, B, C in einer Grundmenge G gelten Rechengesetze, die den Gesetzen der Aussagenlogik entsprechen: Vereinigung gehört zu „oder“, Schnitt zu „und“, Komplement zu „nicht“. Besonders wichtig sind die **Distributivgesetze**
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ und $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ sowie die **Regeln von De Morgan** und . Zwei Mengen sind gleich, wenn jede in der anderen enthalten ist; deshalb besteht ein Beweis von $M = N$ aus den beiden Teilen $M \subseteq N$ und $N \subseteq M$.

Definition: Potenzmenge und kartesisches Produkt

Die **Potenzmenge** $\mathcal{P}(M)$ ist die Menge aller Teilmengen von M. Hat M genau n Elemente, so hat $\mathcal{P}(M)$ genau 2^n Elemente, denn für jedes Element entscheidet man unabhängig, ob es zur Teilmenge gehört. Das **kartesische Produkt**
$A \times B = \{(a, b) : a \in A,\ b \in B\}$ besteht aus geordneten Paaren; es hat $|A| \cdot |B|$ Elemente. Die Ebene $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist das bekannteste Beispiel.

Satz: Inklusion und Exklusion

Für endliche Mengen gilt $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ und

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Elemente im Schnitt werden sonst doppelt gezählt; die Korrekturterme gleichen das aus.

Beispiel 5 (Zählen mit Inklusion und Exklusion)

Wie viele Zahlen von 1 bis 100 sind durch 2 oder durch 3 teilbar?

Durch 2 teilbar sind 50 Zahlen, durch 3 teilbar 33, durch beide (also durch 6) 16. Damit sind es $50 + 33 - 16 = 67$ Zahlen. Nicht durch 2 und nicht durch 3 teilbar sind folglich $100 - 67 = 33$ Zahlen.

Äquivalenzrelationen und Klasseneinteilungen

Eine Relation R auf M ist eine Teilmenge von $M \times M$; man schreibt $a \sim b$ statt $(a, b) \in R$. Sie heißt **reflexiv**, wenn $a \sim a$ für alle a gilt, **symmetrisch**, wenn aus $a \sim b$ stets $b \sim a$ folgt, **antisymmetrisch**, wenn aus $a \sim b$ und $b \sim a$ folgt $a = b$, und **transitiv**, wenn aus $a \sim b$ und $b \sim c$ folgt $a \sim c$. Reflexiv, symmetrisch und transitiv zusammen ergeben eine **Äquivalenzrelation**; reflexiv, antisymmetrisch und transitiv eine **Ordnungsrelation**.

Satz: Äquivalenzklassen bilden eine Zerlegung

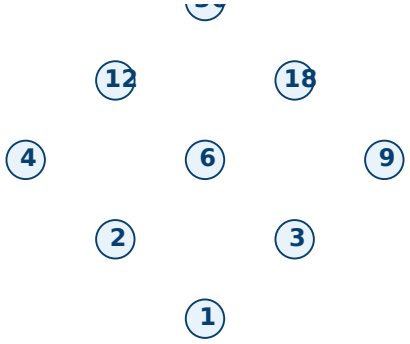
Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M, so sind die Klassen $[a] = \{b \in M : b \sim a\}$ nicht leer, ihre Vereinigung ist M, und zwei Klassen sind entweder gleich oder disjunkt. Umgekehrt definiert jede Zerlegung von M in disjunkte, nichtleere Teile eine Äquivalenzrelation: „liegt im selben Teil wie“.

Beispiel 6 (Restklassen modulo 3)

Auf $\mathbb{Z}$ sei $a \sim b \iff 3 \mid a - b$. Zeigen Sie, dass eine Äquivalenzrelation vorliegt, und bestimmen Sie die Klassen.

Reflexiv: $a - a = 0 = 3 \cdot 0$. Symmetrisch: Aus $a - b = 3k$ folgt $b - a = 3(-k)$. Transitiv: Aus $a - b = 3k$ und $b - c = 3l$ folgt $a - c = 3(k + l)$. Es gibt genau drei Klassen: $[0] = \{\ldots, -3, 0, 3, 6, \ldots\}$, $[1] = \{\ldots, -2, 1, 4, \ldots\}$ und $[2] = \{\ldots, -1, 2, 5, \ldots\}$, die Reste bei Division durch 3. Diese Konstruktion liefert die Restklassen $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, mit denen man wie mit Zahlen rechnen kann.

Ein Standardbeispiel einer Ordnungsrelation ist die Teilbarkeit auf $\mathbb{N}$: $a \mid a$, aus $a \mid b$ und $b \mid a$ folgt $a = b$, und Teilbarkeit ist transitiv. Anders als bei $\leq$ sind aber nicht alle Elemente vergleichbar: Weder $4 \mid 9$ noch $9 \mid 4$. Man spricht von einer Halbordnung und stellt sie mit einem Hasse-Diagramm dar, in dem nur die direkten Teilbarkeiten als Linien eingezeichnet werden.



Injektiv, surjektiv, bijektiv

Eine Abbildung $f : A \to B$ ordnet jedem $a \in A$ genau ein $f(a) \in B$ zu. Sie heißt **injektiv**, wenn verschiedene Argumente verschiedene Bilder haben, **surjektiv**, wenn jedes $b \in B$ als Bild vorkommt, und **bijektiv**, wenn beides gilt. Genau die bijektiven Abbildungen besitzen eine Umkehrabbildung $f^{-1} : B \to A$ mit $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$ und $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$. Ob eine Abbildung injektiv oder surjektiv ist, hängt entscheidend von Definitions- und Zielmenge ab: $x \mapsto x^2$ ist auf $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ weder das eine noch das andere, auf $[0, \infty) \to [0, \infty)$ aber bijektiv.

So gehst du vor: Injektivität und Surjektivität nachweisen

1. Injektiv: Ansatz $f(x_1) = f(x_2)$ und daraus $x_1 = x_2$ folgern. Widerlegen: zwei verschiedene Argumente mit gleichem Bild angeben.
2. Surjektiv: Zu beliebigem y der Zielmenge die Gleichung $f(x) = y$ nach x auflösen und prüfen, dass x im Definitionsbereich liegt. Widerlegen: ein y ohne Urbild angeben.
3. Bijektiv: Beides zeigen; die beim Auflösen gefundene Formel ist die Umkehrabbildung.

Beispiel 7 (Eine gebrochen-lineare Bijektion)

Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ bijektiv ist.

Aus $y = \frac{2x+1}{x-1}$ folgt $yx - y = 2x + 1$, also $x(y-2) = y + 1$ und $x = \frac{y+1}{y-2}$. Für jedes $y \neq 2$ ist das eine eindeutig bestimmte Zahl, und sie ist $\neq 1$, denn $\frac{y+1}{y-2} = 1$ würde $y + 1 = y - 2$ bedeuten. Also existiert zu jedem y genau ein Urbild: f ist bijektiv mit $f^{-1}(y) = \frac{y+1}{y-2}$.

Bild, Urbild und Mächtigkeit

Für $U \subseteq A$ heißt $f(U) = \{f(u) : u \in U\}$ das Bild, für $V \subseteq B$ heißt $f^{-1}(V) = \{a \in A : f(a) \in V\}$ das Urbild – das Urbild ist auch dann definiert, wenn f keine Umkehrabbildung besitzt. Urbilder vertragen sich mit allen Mengenoperationen, Bilder nur mit Vereinigungen: Es gilt stets $f(U_1 \cap U_2) \subseteq f(U_1) \cap f(U_2)$, aber Gleichheit nur bei injektivem f. Zwei Mengen heißen **gleichmächtig**, wenn es eine Bijektion zwischen ihnen

gibt. Eine Menge heißt abzählbar, wenn sie gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ ist. $\mathbb{Z}$ und sogar $\mathbb{Q}$ sind abzählbar, $\mathbb{R}$ dagegen ist es nach Cantors Diagonalargument nicht.

Achtung: Typische Fehler

Verwechseln Sie nicht $a \in M$ (Element) und $\{a\} \subseteq M$ (Teilmenge). Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge, aber nicht unbedingt Element. Eine Relation, die symmetrisch und transitiv ist, muss nicht reflexiv sein – der übliche „Beweis“ setzt stillschweigend voraus, dass jedes a zu irgendeinem b in Relation steht. Das Symbol $f^{-1}(V)$ bezeichnet ein Urbild und setzt keine Bijektivität voraus. Und eine Abbildung ist erst dann vollständig angegeben, wenn Definitionsmenge, Zielmenge und Zuordnungsvorschrift feststehen.

Wusstest du? Hilberts Hotel

David Hilbert erzählte gern von einem Hotel mit unendlich vielen Zimmern, die alle belegt sind. Kommt ein neuer Gast, zieht jeder Gast von Zimmer n in Zimmer $n+1$, und Zimmer 1 wird frei. Kommen unendlich viele neue Gäste, zieht jeder in Zimmer $2n$, und alle ungeraden Zimmer werden frei. Die Geschichte zeigt, dass eine unendliche Menge zu einer echten Teilmenge gleichmächtig sein kann. Georg Cantor, der die Mengenlehre ab 1874 entwickelte, bewies außerdem, dass es verschieden große Unendlichkeiten gibt.

Hinweis: Beweise sauber aufschreiben

Beginnen Sie einen Elementbeweis immer mit „Sei $x \in \ldots$ beliebig.“ und schließen Sie mit „Also gilt $x \in \ldots$.“ Bei Äquivalenzrelationen prüfen Sie die drei Eigenschaften einzeln und in dieser Reihenfolge. Bei Abbildungen gehört zum Beweis der Bijektivität auch der Nachweis, dass die gefundene Umkehrformel wirklich in der Definitionsmenge landet. Eine kurze Probe mit einem konkreten Zahlenwert deckt viele Rechenfehler auf, bevor sie in den Beweis wandern.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Mengengleichheit $M = N$ zeigt man über $M \subseteq N$ und $N \subseteq M$ (Elementbeweis); De Morgan: , .
- $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$, $|A \times B| = |A| \cdot |B|$, $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ (Inklusion und Exklusion).
- Relation auf M: Teilmenge von $M \times M$; Eigenschaften reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, transitiv.
- Äquivalenzrelation = reflexiv, symmetrisch, transitiv; ihre Klassen zerlegen M in disjunkte, nichtleere Teile (z. B. Restklassen modulo n).
- Ordnungsrelation = reflexiv, antisymmetrisch, transitiv; Teilbarkeit ist eine Halbordnung, $\leq$ eine Totalordnung.
- Injektiv: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$; surjektiv: $f(x) = y$ für jedes y lösbar; bijektiv $\iff$ Umkehrabbildung existiert.

- Urbilder vertragen alle Mengenoperationen, Bilder nur Vereinigungen: $f(U_1 \cap U_2) \subseteq f(U_1) \cap f(U_2)$.
- Gleichmächtig = es gibt eine Bijektion; $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ sind abzählbar, $\mathbb{R}$ und $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ nicht (Cantor).

Achtung

Verwechseln Sie nicht das *Urbild* $f^{-1}(B')$, das für jede Abbildung existiert, mit der *Umkehrabbildung*, die Bijektivität verlangt. Die Eigenschaften injektiv und surjektiv hängen von Definitions- und Zielmenge ab: $x \mapsto x^2$ ist auf $\mathbb{R}$ nicht injektiv, auf $[0;\infty)$ schon. Bei Äquivalenzrelationen alle drei Eigenschaften einzeln prüfen.

Ottos Tipp

Für „injektiv“ immer mit $f(x) = f(y)$ starten und auf $x = y$ umformen; für „surjektiv“ die Gleichung $f(x) = y$ nach x auflösen und prüfen, ob die Lösung im Definitionsbereich liegt.