Arbeitsblatt - Mengen, Relationen und Abbildungen

Klasse: Studium 1 Semester · 20

Der Rechenweg muss angegeben werden.

Aufgabe 1

Aufgabe 1 – Mengenoperationen

In der Grundmenge $G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ seien $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ und $C = \{1, 5, 6\}$.

a) Bestimmen Sie $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ und $B \setminus A$.
b) Bestimmen Sie $A \cap (B \cup C)$ und $(A \cap B) \cup (A \cap C)$. Welches Gesetz wird bestätigt?
c) Bestimmen Sie und $\bar{A} \cap \bar{B}$.
d) Zeichnen Sie ein Venn-Diagramm mit allen sechs Elementen.

Aufgabe 2

Aufgabe 2 – Potenzmenge und Produkt

Bestimmen Sie die folgenden Mengen und ihre Mächtigkeiten.

a) $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$
b) $\{1, 2\} \times \{x, y, z\}$
c) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1\}))$
d) Begründen Sie allgemein $|\mathcal{P}(M)| = 2^n$ für $|M| = n$.

Aufgabe 3

Aufgabe 3 – Elementbeweise

Beweisen Sie für beliebige Mengen A, B, C mit einem Elementbeweis (zwei Inklusionen oder Äquivalenzkette).

a) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
c) $A \subseteq B \iff A \cap B = A$

Aufgabe 4

Aufgabe 4 – Eigenschaften von Relationen

Prüfen Sie, ob die Relation reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch oder transitiv ist. Begründen Sie oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

a) Auf $\{1, 2, 3\}$: $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}$

b) Auf $\mathbb{R}$: $x \leq y$
c) Auf $\{1,2,3\}$: $R_3 = \{(1,2),(2,3)\}$
d) Auf $\mathbb{Z}$: $a \sim b \iff a - b$ ist gerade

Aufgabe 5

Aufgabe 5 – Äquivalenzklassen beschreiben

Beschreiben Sie die Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelationen.

a) Auf $\mathbb{Z}$: $a \sim b \iff 4 \mid a - b$. Wie viele Klassen gibt es? In welcher Klasse liegt -7?
b) Auf $\mathbb{R}^2$: $(x,y) \sim (x',y') \iff x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$.
c) Auf $\mathbb{R}$: $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}$. Geben Sie ein Vertretersystem an.

Aufgabe 6

Aufgabe 6 – Injektiv oder surjektiv?

Untersuchen Sie die Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität. Geben Sie im bijektiven Fall die Umkehrabbildung an.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 1$
b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$, und $\tilde{g} : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $\tilde{g}(x) = x^2$
c) $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $h(n) = n + 1$ (mit $\mathbb{N} = \{1,2,\ldots\}$)
d) $k : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $k(n) = \lfloor n/2 \rfloor$

Aufgabe 7

Aufgabe 7 – Matrikelnummern und Geburtstage

An einer Hochschule beginnen in einem Studiengang 400 Erstsemester. Jede Person erhält eine Matrikelnummer. Wir betrachten die Abbildungen m: Person $\mapsto$ Matrikelnummer und g: Person $\mapsto$ Geburtstag (Tag und Monat, 366 Möglichkeiten).

a) Warum muss m injektiv sein? Ist m surjektiv auf die Menge aller sechsstelligen Zahlen?
b) Zeigen Sie mit dem Schubfachprinzip, dass g nicht injektiv sein kann.
c) Kann g surjektiv sein? Was müsste dafür gelten?
d) Die Relation „hat am selben Tag Geburtstag“ ist eine Äquivalenzrelation. Wie viele Klassen gibt es höchstens?

Aufgabe 8

Aufgabe 8 – Tutorien und Umfragen

Von 120 Erstsemestern besuchen 65 das Tutorium zur Linearen Algebra (L), 50 das Tutorium zur Analysis (A) und 25 beide. Außerdem nehmen 30 am Programmierkurs (P) teil; davon besuchen 12 auch L, 10 auch A und 5 alle drei Angebote.

a) Wie viele besuchen mindestens eines der beiden Tutorien?
b) Wie viele besuchen nur das Tutorium zur Linearen Algebra (ohne Analysis)?

c) Wie viele nehmen an mindestens einem der drei Angebote teil?
d) Wie viele nehmen an keinem Angebot teil? Prüfen Sie mit einem Venn-Diagramm.

Aufgabe 9

Aufgabe 9 – Verbindungen im Nahverkehr

In einem kleinen Verkehrsverbund gibt es die Linien S1 (A – B – C), S2 (C – D) und einen Bus (E – F). Alle Linien fahren in beide Richtungen. Zwei Haltestellen stehen in der Relation $x \to y$, wenn man ohne Umsteigen fahren kann, und in der Relation $x \approx y$, wenn man mit beliebig vielen Umstiegen fahren kann (oder $x = y$ ist).

a) Ist $\to$ symmetrisch? Ist $\to$ transitiv?
b) Zeigen Sie, dass $\approx$ eine Äquivalenzrelation ist.
c) Bestimmen Sie die Äquivalenzklassen von $\approx$.
d) Eine neue Buslinie verbindet D und E. Wie ändern sich die Klassen?

Aufgabe 10

Aufgabe 10 – Uhrzeiten und Wochentage

Uhrzeiten rechnet man modulo 24, Wochentage modulo 7. Zwei Zeitpunkte sind „gleich auf der Uhr“, wenn sich die Stunden um ein Vielfaches von 24 unterscheiden.

a) Es ist 9 Uhr. Welche Uhrzeit zeigt die Uhr in 100 Stunden?
b) Heute ist Montag. Welcher Wochentag ist in 1000 Tagen?
c) Welche Uhrzeit ist 1000 Stunden nach 9 Uhr?
d) Erklären Sie, warum man in $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ Addition von Klassen definieren kann, obwohl verschiedene Vertreter gewählt werden können.

Aufgabe 11

Aufgabe 11 – Verteilung auf Tutorien

Vier Studierende sollen auf drei Tutoriumsgruppen verteilt werden. Eine Verteilung ist eine Abbildung $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}\}$.

a) Wie viele Verteilungen gibt es insgesamt?
b) Gibt es eine injektive Verteilung? Begründen Sie.
c) Wie viele Verteilungen lassen eine bestimmte Gruppe leer? Wie viele lassen mindestens eine Gruppe leer?
d) Wie viele Verteilungen sind surjektiv, sodass jede Gruppe jemanden bekommt?

Aufgabe 12

Aufgabe 12 – Die Teiler von 36

Auf der Menge $T = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$ der Teiler von 36 betrachten wir die Teilbarkeitsrelation $a \mid b$. Im Kurs ist ihr Hasse-Diagramm abgebildet.

a) Zeigen Sie, dass $\mid$ eine Ordnungsrelation auf T ist.

b) Ist sie total? Geben Sie zwei unvergleichbare Elemente an.
c) Bestimmen Sie das größte gemeinsame untere Element von 12 und 18 sowie das kleinste gemeinsame obere Element von 4 und 9. Wie heißen diese Zahlen sonst?
d) Wie viele Paare (a, b) mit $a \neq b$ und $a \mid b$ gibt es? Warum sind das mehr als die 12 Linien im Diagramm?

Aufgabe 13

Aufgabe 13 – Verschlüsselung durch Verkettung

Buchstaben werden als Zahlen 0 bis 25 codiert. Zwei Verschlüsselungen sind die Verschiebung $f(x) = x + 3 \bmod 26$ und die Multiplikation $g(x) = 7x \bmod 26$.

a) Zeigen Sie, dass g bijektiv ist, indem Sie $7 \cdot 15 \equiv 1 \pmod{26}$ nachrechnen und g^{-1} angeben.
b) Bestimmen Sie $g \circ f$ und $f \circ g$ als Formeln. Sind sie gleich?
c) Verschlüsseln Sie den Buchstaben C ($= 2$) mit beiden Verkettungen.
d) Bestimmen Sie die Umkehrabbildung von $g \circ f$ und entschlüsseln Sie 18.

Aufgabe 14

Aufgabe 14 – Punkte und Noten

In einer Übungsklausur werden 0 bis 20 Punkte vergeben (nur ganze Punkte). Die Notenabbildung N ordnet die Punkte so zu:

Punkte	18–20	15–17	12–14	10–11	0–9
Note	1	2	3	4	5

a) Ist $N : \{0, \ldots, 20\} \to \{1, \ldots, 5\}$ injektiv bzw. surjektiv?
b) Bestimmen Sie die Urbilder $N^{-1}(\{1, 2\})$ und $N^{-1}(\{5\})$ und ihre Mächtigkeiten.
c) Die Relation „bekommt dieselbe Note“ ist eine Äquivalenzrelation. Beschreiben Sie ihre Klassen.
d) Zeigen Sie an diesem Beispiel, dass $N(N^{-1}(V)) = V$ für surjektives N gilt, aber $N^{-1}(N(U)) \neq U$ möglich ist.

Aufgabe 15

Aufgabe 15 – Bilder von Schnitten

Sei $f : A \to B$ eine Abbildung, $U_1, U_2 \subseteq A$ und $V_1, V_2 \subseteq B$. In dieser Aufgabe untersuchen Sie, welche Rechenregeln für Bilder und Urbilder gelten.

a) Beweisen Sie $f(U_1 \cap U_2) \subseteq f(U_1) \cap f(U_2)$.
b) Zeigen Sie mit $f(x) = x^2$, $U_1 = \{-1\}$, $U_2 = \{1\}$, dass Gleichheit nicht gelten muss.
c) Beweisen Sie: Ist f injektiv, so gilt Gleichheit.
d) Beweisen Sie $f^{-1}(V_1 \cap V_2) = f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2)$.
e) Gilt auch $f(U_1 \cup U_2) = f(U_1) \cup f(U_2)$? Begründen Sie kurz.

Aufgabe 16

Aufgabe 16 – Abzählen von Z und von Paaren

Eine Menge ist abzählbar, wenn man ihre Elemente lückenlos durchnummerieren kann, also eine Bijektion zu $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ existiert. Für $\mathbb{Z}$ verwendet man $z(n) = \frac{n}{2}$ für gerades n und $z(n) = -\frac{n+1}{2}$ für ungerades n. Für Paare natürlicher Zahlen verwendet man die Cantorsche Paarungsfunktion $\pi(m, n) = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + n$.

a) Berechnen Sie $z(0), \ldots, z(6)$ und zeigen Sie, dass $z : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}$ bijektiv ist.
b) Berechnen Sie $\pi(0,0)$, $\pi(1,0)$, $\pi(0,1)$, $\pi(2,1)$ und $\pi(3,0)$.
c) Erklären Sie anhand einer Skizze der Gitterpunkte, warum π die Paare entlang der Diagonalen $m + n = k$ durchnummeriert.
d) Folgern Sie, dass $\mathbb{Q}$ abzählbar ist.

Aufgabe 17

Aufgabe 17 – Hilberts Hotel

Ein Hotel hat die Zimmer $1, 2, 3, \ldots$, alle belegt. Die Hotelleitung darf Gäste umziehen lassen, aber jeder Gast muss danach wieder ein eigenes Zimmer haben. Mathematisch ist ein Umzugsplan eine injektive Abbildung $u : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (altes Zimmer $\mapsto$ neues Zimmer).

a) Ein neuer Gast kommt an. Geben Sie einen Umzugsplan an, der Zimmer 1 frei macht.
b) Ein Bus mit unendlich vielen Gästen $b_1, b_2, \ldots$ kommt an. Zeigen Sie, dass $u(n) = 2n$ genügend Platz schafft, und weisen Sie den Neuen Zimmer zu.
c) Ist $u(n) = 2n$ surjektiv? Was bedeutet die Antwort für das Hotel?
d) Zeigen Sie, dass $\mathbb{N}$ und die Menge der geraden Zahlen gleichmächtig sind, und erklären Sie, warum das bei endlichen Mengen unmöglich wäre.

Aufgabe 18

Aufgabe 18 – Brüche als Äquivalenzklassen

Auf $M = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ sei $(a, b) \sim (c, d) \iff ad = bc$. Man denkt bei (a, b) an den Bruch $\frac{a}{b}$.

a) Zeigen Sie, dass $\sim$ reflexiv und symmetrisch ist.
b) Zeigen Sie die Transitivität. Wo wird $d \neq 0$ benötigt?
c) Welche Paare liegen in der Klasse von $(2, 3)$? Geben Sie vier an.
d) Zeigen Sie, dass die Addition $[(a, b)] + [(c, d)] = [(ad + bc, bd)]$ nicht von den Vertretern abhängt (Wohldefiniertheit).

Aufgabe 19

Aufgabe 19 – Verkettung und ihre Eigenschaften

Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Abbildungen.

a) Zeigen Sie: Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv.
b) Zeigen Sie: Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist g surjektiv.
c) Geben Sie ein Beispiel an, in dem $g \circ f$ bijektiv, aber g nicht injektiv ist.
d) Folgern Sie: Gibt es g mit $g \circ f = \mathrm{id}_A$ und h mit $f \circ h = \mathrm{id}_B$, so ist f bijektiv und $g = h$.

Aufgabe 20

Aufgabe 20 – Knobelaufgabe: Cantors Diagonalargument

Georg Cantor bewies, dass keine Menge gleichmächtig zu ihrer Potenzmenge ist. Sei $f : M \to \mathcal{P}(M)$ eine beliebige Abbildung und $D = \{x \in M : x \notin f(x)\}$.

a) Bestimmen Sie D für $M = \{1, 2, 3\}$ und $f(1) = \{1, 2\}$, $f(2) = \emptyset$, $f(3) = \{1, 3\}$. Liegt D im Bild von f?
b) Beweisen Sie allgemein: D liegt nicht im Bild von f. Nehmen Sie dazu $D = f(d)$ an und fragen Sie, ob $d \in D$ gilt.
c) Folgern Sie, dass $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ nicht abzählbar ist.
d) Erklären Sie, warum es damit unendlich viele verschiedene Stufen von Unendlichkeit gibt.