Lösungen - Mengen, Relationen und Abbildungen

Klasse: Studium 1 Semester

Lösung zu Aufgabe 1

a) $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$, $A \cap B = \{3,4\}$, $A \setminus B = \{1,2\}$, $B \setminus A = \{5\}$.
b) $B \cup C = \{1,3,4,5,6\}$, also $A \cap (B \cup C) = \{1,3,4\}$. $A \cap B = \{3,4\}$, $A \cap C = \{1\}$, Vereinigung $\{1,3,4\}$. Das Distributivgesetz ist bestätigt.
c) . $\bar{A} = \{5,6\}$, $\bar{B} = \{1,2,6\}$, $\bar{A} \cap \bar{B} = \{6\}$. De Morgan ist bestätigt.
d) Im Schnitt $A \cap B$ liegen $3,4$; nur in A: 2; in $A \cap C$ ohne B: 1; in $B \cap C$ ohne A: 5; nur in C: 6. Alle Elemente liegen in mindestens einer Menge.

Lösung zu Aufgabe 2

a) $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}$: $8 = 2^3$ Elemente.
b) $\{(1,x),(1,y),(1,z),(2,x),(2,y),(2,z)\}$: $2 \cdot 3 = 6$ Paare.
c) $\mathcal{P}(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}$ hat 2 Elemente, also hat $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1\})) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{1\}\}, \{\emptyset, \{1\}\}\}$ genau 4 Elemente.
d) Für jedes der n Elemente entscheidet man unabhängig „gehört dazu“ oder „gehört nicht dazu“. Das ergibt $2 \cdot 2 \cdots 2 = 2^n$ Möglichkeiten (alternativ: Induktion über n).

Lösung zu Aufgabe 3

a)
$x \in A \setminus (B \cup C) \iff x \in A \wedge \neg(x \in B \vee x \in C) \iff x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C \iff (x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \in A \wedge x \notin C) \iff x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
. □
b)
$x \in A \cap (B \cup C) \iff x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \iff (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$
, mit dem Distributivgesetz der Logik. □
c) „⇒“: $A \cap B \subseteq A$ gilt immer. Ist $x \in A$, so wegen $A \subseteq B$ auch $x \in B$, also $x \in A \cap B$. „⇐“: Ist $x \in A = A \cap B$, so $x \in B$. □

Lösung zu Aufgabe 4

a) Reflexiv (alle (a,a) enthalten), symmetrisch (zu $(1,2)$ gehört $(2,1)$), transitiv (geprüft für alle Paare), nicht antisymmetrisch ($1 \sim 2$, $2 \sim 1$, $1 \neq 2$). Äquivalenzrelation mit Klassen $\{1,2\}$, $\{3\}$.
b) Reflexiv, antisymmetrisch und transitiv, aber nicht symmetrisch ($1 \leq 2$, nicht $2 \leq 1$): eine Ordnungsrelation.
c) Nicht reflexiv ($(1,1) \notin R_3$), nicht symmetrisch, antisymmetrisch (keine Paare in beiden Richtungen), nicht transitiv ($(1,2),(2,3) \in R_3$, aber $(1,3) \notin R_3$).
d) Reflexiv (0 ist gerade), symmetrisch ($-(a-b)$ gerade), transitiv (Summe gerader Zahlen ist gerade), nicht antisymmetrisch: Äquivalenzrelation mit den Klassen gerade und ungerade Zahlen.

Lösung zu Aufgabe 5

a) Vier Klassen $[0], [1], [2], [3]$ nach dem Rest bei Division durch 4. $-7 = 4 \cdot (-2) + 1$, also $-7 \in [1]$.
b) Zwei Punkte sind äquivalent, wenn sie gleich weit vom Ursprung entfernt sind. Die Klassen sind die Kreise um 0 mit Radius $r > 0$ und der Ursprung selbst.
c) Zahlen sind äquivalent, wenn sie denselben Nachkommaanteil haben. Jede Klasse enthält genau eine Zahl aus $[0, 1)$; dieses Intervall ist ein Vertretersystem. Anschaulich wickelt man die Zahlengerade auf einen Kreis vom Umfang 1.

Lösung zu Aufgabe 6

a) Aus $3x_1 - 1 = 3x_2 - 1$ folgt $x_1 = x_2$: injektiv. $y = 3x - 1 \iff x = \frac{y+1}{3}$: surjektiv. Bijektiv mit $f^{-1}(y) = \frac{y+1}{3}$.
b) $g(-1) = g(1)$: nicht injektiv; -1 hat kein Urbild: nicht surjektiv. $\tilde{g}$ ist bijektiv mit $\tilde{g}^{-1}(y) = \sqrt{y}$.
c) $n_1 + 1 = n_2 + 1 \Rightarrow n_1 = n_2$: injektiv. 1 hat kein Urbild in $\mathbb{N}$: nicht surjektiv.
d) $k(0) = k(1) = 0$: nicht injektiv. Zu $m \in \mathbb{Z}$ ist $k(2m) = m$: surjektiv.

Lösung zu Aufgabe 7

a) Zwei Personen dürfen nicht dieselbe Nummer haben, sonst könnte man sie nicht unterscheiden. Surjektiv ist m nicht: 400 Personen können höchstens 400 der $900\,000$ sechsstelligen Zahlen belegen.
b) 400 Personen werden auf 366 Tage verteilt. Wäre g injektiv, bräuchte man mindestens 400 verschiedene Tage. Also haben mindestens zwei Personen am selben Tag Geburtstag.
c) Möglich ist es: Dazu müsste jeder der 366 Tage, auch der 29. Februar, mindestens einmal vorkommen. Das ist bei 400 Personen unwahrscheinlich, aber nicht ausgeschlossen.
d) Die Klassen sind die Fasern $g^{-1}(\{d\})$ der belegten Tage, also höchstens 366 Klassen.

Lösung zu Aufgabe 8

a) $|L \cup A| = 65 + 50 - 25 = 90$.
b) $|L \setminus A| = 65 - 25 = 40$.
c) $|L \cup A \cup P| = 65 + 50 + 30 - 25 - 12 - 10 + 5 = 103$.
d) $120 - 103 = 17$. Im Venn-Diagramm: nur L: $65 - 25 - 12 + 5 = 33$, nur A: $50 - 25 - 10 + 5 = 20$, nur P: $30 - 12 - 10 + 5 = 13$, L und A ohne P: 20, L und P ohne A: 7, A und P ohne L: 5, alle drei: 5. Summe 103.

Lösung zu Aufgabe 9

a) Symmetrisch: ja, die Linien fahren in beide Richtungen. Transitiv: nein, $A \to C$ und $C \to D$, aber nicht $A \to D$ (Umstieg in C nötig).
b) Reflexiv nach Definition; symmetrisch, da man jede Fahrt rückwärts fahren kann;

transitiv, da man zwei Fahrten aneinanderhängen kann.
c) $\{A, B, C, D\}$ und $\{E, F\}$: die zusammenhängenden Teile des Netzes.
d) Dann ist alles verbunden: Es gibt nur noch eine Klasse $\{A, B, C, D, E, F\}$.

Lösung zu Aufgabe 10

a) $9 + 100 = 109 = 4 \cdot 24 + 13$: 13 Uhr.
b) $1000 = 142 \cdot 7 + 6$. Sechs Tage nach Montag: Sonntag.
c) $1009 = 42 \cdot 24 + 1$: 1 Uhr nachts.
d) Ist $a \equiv a'$ und $b \equiv b' \pmod{24}$, so $a + b - (a' + b') = (a - a') + (b - b')$ ein Vielfaches von 24. Die Summenklasse hängt also nicht von der Wahl der Vertreter ab: Die Addition ist wohldefiniert.

Lösung zu Aufgabe 11

a) Jede der vier Personen hat drei Möglichkeiten: $3^4 = 81$.
b) Nein: Nach dem Schubfachprinzip müssen zwei der vier Personen in derselben Gruppe landen.
c) Ohne Gruppe I: $2^4 = 16$ Verteilungen. Inklusion und Exklusion: $3 \cdot 16 - 3 \cdot 1 + 0 = 45$ Verteilungen lassen mindestens eine Gruppe leer (3 Verteilungen lassen zwei Gruppen leer).
d) $81 - 45 = 36$. Kontrolle: Eine Gruppe bekommt zwei Personen (3 Wahlen der Gruppe, $\binom{4}{2} = 6$ Paare), die übrigen zwei werden auf zwei Gruppen verteilt (2 Arten): $3 \cdot 6 \cdot 2 = 36$.

Lösung zu Aufgabe 12

a) Reflexiv: $a = 1 \cdot a$. Antisymmetrisch: Aus $b = ka$, $a = lb$ mit $k, l \in \mathbb{N}$ folgt $kl = 1$, also $k = l = 1$. Transitiv: Aus $b = ka$, $c = lb$ folgt $c = (kl)a$.
b) Nicht total: $4 \nmid 9$ und $9 \nmid 4$.
c) Untere Schranken von 12 und 18: $1, 2, 3, 6$; die größte ist $6 = \mathrm{ggT}(12, 18)$. Obere Schranke von 4 und 9: nur $36 = \mathrm{kgV}(4, 9)$.
d) 27 Paare (zum Beispiel $1 \mid b$ für 8 Werte b). Das Diagramm zeigt nur direkte Teilbarkeiten; die übrigen folgen durch Transitivität (etwa $2 \mid 12$ über $2 \mid 4 \mid 12$).

Lösung zu Aufgabe 13

a) $7 \cdot 15 = 105 = 4 \cdot 26 + 1$. Also ist $g^{-1}(y) = 15y \bmod 26$, denn $15 \cdot 7x \equiv x$. Mit Umkehrabbildung ist g bijektiv.
b) $(g \circ f)(x) = 7(x + 3) = 7x + 21$, $(f \circ g)(x) = 7x + 3$ (jeweils mod 26). Verschieden: Die Verkettung ist nicht kommutativ.
c) $g(f(2)) = 7 \cdot 5 = 35 \equiv 9$ (J). $f(g(2)) = 14 + 3 = 17$ (R).
d) $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$: $y \mapsto 15y - 3 \equiv 15(y - 21)$. Für $y = 18$: $15 \cdot (-3) = -45 \equiv 7$ (H). Probe: $7 \cdot (7 + 3) = 70 \equiv 18$.

Lösung zu Aufgabe 14

a) Nicht injektiv ($N(18) = N(19) = 1$); surjektiv, da jede Note vorkommt.
b) $N^{-1}(\{1,2\}) = \{15,\dots,20\}$ mit 6 Elementen; $N^{-1}(\{5\}) = \{0,\dots,9\}$ mit 10 Elementen.
c) Die fünf Klassen sind die Punktebereiche $\{0..9\}$, $\{10,11\}$, $\{12,13,14\}$, $\{15,16,17\}$, $\{18,19,20\}$: genau die Fasern $N^{-1}(\{k\})$.
d) $V = \{2\}$: $N^{-1}(V) = \{15,16,17\}$, $N(\{15,16,17\}) = \{2\} = V$. $U = \{16\}$: $N(U) = \{2\}$, $N^{-1}(\{2\}) = \{15,16,17\} \neq U$.

Lösung zu Aufgabe 15

a) Ist $y \in f(U_1 \cap U_2)$, so $y = f(x)$ mit $x \in U_1$ und $x \in U_2$. Dann $y \in f(U_1)$ und $y \in f(U_2)$. $\square$
b) $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, also $f(U_1 \cap U_2) = \emptyset$. Aber $f(U_1) = f(U_2) = \{1\}$, der Schnitt ist $\{1\}$.
c) Sei $y \in f(U_1) \cap f(U_2)$, also $y = f(x_1) = f(x_2)$ mit $x_i \in U_i$. Injektivität liefert $x_1 = x_2 \in U_1 \cap U_2$, also $y \in f(U_1 \cap U_2)$. $\square$
d) $x \in f^{-1}(V_1 \cap V_2) \iff f(x) \in V_1 \wedge f(x) \in V_2 \iff x \in f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2)$. $\square$
e) Ja: $y \in f(U_1 \cup U_2) \iff \exists x \in U_1 \cup U_2 : y = f(x) \iff y \in f(U_1) \vee y \in f(U_2)$.

Lösung zu Aufgabe 16

a) $0, -1, 1, -2, 2, -3, 3$. Gerade n treffen genau die Zahlen ≥ 0, ungerade genau die negativen, jeweils injektiv; also bijektiv mit $z^{-1}(k) = 2k$ für $k \geq 0$ und $z^{-1}(k) = -2k - 1$ für k.
b) 0, 1, 2, $\frac{3\cdot 4}{2} + 1 = 7$, $\frac{3\cdot 4}{2} + 0 = 6$.
c) Auf der Diagonale $m + n = k$ liegen $k + 1$ Punkte. Vorher wurden $1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ Punkte nummeriert; innerhalb der Diagonale zählt n weiter. So erhält jeder Punkt genau eine Nummer.
d) Jede rationale Zahl ist $\pm\frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{N}_0$, $q \in \mathbb{N}$. Die Paare (p, q) sind abzählbar, ebenso ihre Vorzeichenvarianten. Lässt man doppelte Darstellungen weg, bleibt eine unendliche Teilmenge einer abzählbaren Menge, also abzählbar.

Lösung zu Aufgabe 17

a) $u(n) = n + 1$ ist injektiv, und 1 liegt nicht im Bild. Der neue Gast bekommt Zimmer 1.
b) u ist injektiv, die Bewohner belegen genau die geraden Zimmer. Gast b_k bekommt Zimmer $2k - 1$; das ist injektiv, und alle Zimmer sind wieder belegt.
c) Nein, ungerade Zahlen haben kein Urbild. Gerade das ist der freie Platz für die neuen Gäste.
d) $n \mapsto 2n$ ist eine Bijektion von $\mathbb{N}$ auf die geraden Zahlen. Bei einer endlichen Menge mit n Elementen hat eine echte Teilmenge weniger als n Elemente, und injektive Abbildungen in eine kleinere Menge gibt es nach dem Schubfachprinzip nicht.

Lösung zu Aufgabe 18

a) $ab = ba$: reflexiv. Aus $ad = bc$ folgt $cb = da$: symmetrisch.
b) Aus $ad = bc$ und $cf = de$ folgt $adf = bcf = bde$, also $d(af - be) = 0$. Wegen $d \neq 0$ ist $af = be$, also $(a, b) \sim (e, f)$. □
c) Zum Beispiel $(4, 6)$, $(-2, -3)$, $(20, 30)$, $(-6, -9)$: alle $(2k, 3k)$ mit $k \neq 0$.
d) Sei $(a, b) \sim (a', b')$, also $ab' = a'b$. Zu zeigen: $(ad + bc)b'd = (a'd + b'c)bd$. Links $ab'd^2 + bb'cd$, rechts $a'bd^2 + bb'cd$; wegen $ab' = a'b$ gleich. Für den zweiten Summanden analog. □

Lösung zu Aufgabe 19

a) Aus $f(x_1) = f(x_2)$ folgt $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ und wegen der Injektivität von $g \circ f$ dann $x_1 = x_2$. □
b) Zu $c \in C$ gibt es a mit $g(f(a)) = c$. Dann ist $b = f(a)$ ein Urbild von c unter g. □
c) $A = C = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$, $f(1) = 1$, $g(1) = g(2) = 1$. Dann ist $g \circ f = \mathrm{id}$, aber g nicht injektiv.
d) Nach a) ist f injektiv, nach b) (mit $f \circ h$) surjektiv. Außerdem $g = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = h$. □

Lösung zu Aufgabe 20

a) $1 \in f(1)$, $2 \notin f(2)$, $3 \in f(3)$. Also $D = \{2\}$. Die Bilder sind $\{1, 2\}, \emptyset, \{1, 3\}$; $\{2\}$ kommt nicht vor.
b) Wäre $D = f(d)$, dann gälte: $d \in D \iff d \notin f(d) \iff d \notin D$. Widerspruch. Also ist keine Abbildung $M \to \mathcal{P}(M)$ surjektiv. □
c) Eine Bijektion $\mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ wäre insbesondere surjektiv – das ist nach b) unmöglich.
d) Man bildet $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$, ... Jede Stufe ist echt mächtiger als die vorige, die Folge bricht nie ab.