Lösungen zur Klassenarbeit - Lineare Gleichungssysteme und Gauß-Algorithmus

Klasse: Studium 1 Semester · Dauer: 60 Minuten · /20

Lösung zu Aufgabe 1 (4 BE/Punkte)

a) $Z_2 - Z_1$: $(0, 1, 2 \mid 8)$. $Z_3 - 2Z_1$: $(0, -1, -1 \mid -5)$. $Z_3 + Z_2$: $(0, 0, 1 \mid 3)$ (2 P.).
b) $z = 3$, $y = 8 - 6 = 2$, $x = 6 - 2 - 3 = 1$. Probe: $1 + 4 + 9 = 14$, $2 + 2 + 3 = 7$ (2 P.).
Zuerst wird in der ersten Spalte unterhalb des Pivotelements eliminiert, dann in der zweiten Spalte; dabei rechnet man die rechte Seite stets mit. Die Stufenform hat drei Pivotelemente, also ist die Lösung eindeutig. Beim Rückwärtseinsetzen beginnt man mit z. Die Probe in den beiden nicht benutzten Gleichungen sichert das Ergebnis ab.

Lösung zu Aufgabe 2 (4 BE/Punkte)

a) $Z_2 - 2Z_1$: $3z = 3$, $z = 1$. Mit $y = t$: $x = 3 - 2t + 1 = 4 - 2t$. $L = \{(4 - 2t,\ t,\ 1)\}$ (2 P.).
b) Spezielle Lösung $(4, 0, 1)^T$; Basis des Kerns $(-2, 1, 0)^T$ (2 P.).
Nach der Elimination bleiben zwei Gleichungen mit drei Unbekannten; die Pivotelemente stehen bei x und z, daher ist y frei. Die Lösungsmenge ist eine Gerade im Raum. Der Richtungsvektor $(-2, 1, 0)$ löst das homogene System, der Aufpunkt $(4, 0, 1)$ das inhomogene. Probe für $t = 1$: $(2, 1, 1)$ ergibt $2 + 2 - 1 = 3$ und $4 + 4 + 1 = 9$.

Lösung zu Aufgabe 3 (5 BE/Punkte)

a) $Z_2 - 2Z_1$: $y + 2z = 1$. $Z_3 - Z_1$: $y + (a - 1)z = c - 1$. $Z_3 - Z_2$: $(a - 3)z = c - 2$ (2 P.).
b) $a \neq 3$: genau eine Lösung; $a = 3$, $c = 2$: unendlich viele; $a = 3$, $c \neq 2$: keine (2 P.).
c) $z = t$, $y = 1 - 2t$, $x = 1 - y - z = t$: $L = \{(t, 1 - 2t, t)\}$ (1 P.).
Man eliminiert, ohne durch Ausdrücke mit dem Parameter zu teilen. Entscheidend ist die letzte Zeile $(a - 3)z = c - 2$: Ist der Koeffizient ungleich null, gibt es genau eine Lösung. Verschwindet er, entscheidet die rechte Seite zwischen Widerspruch und Nullzeile. Kontrolle über die Determinante: Sie beträgt $a - 3$ und verschwindet genau im kritischen Fall.

Lösung zu Aufgabe 4 (4 BE/Punkte)

a) $k + s + e = 200$, $6k + 8s + 11e = 1870$, $s = 2k$ (2 P.).
b) Mit $s = 2k$: $3k + e = 200$ und $22k + 11e = 1870$. Aus $e = 200 - 3k$:
$22k + 2200 - 33k = 1870$, $k = 30$. Also 30 Kinder, 60 Studierende, 110 Erwachsene;
Probe: $180 + 480 + 1210 = 1870$ (2 P.).
Die drei Bedingungen sind Gesamtzahl, Einnahmen und das Verhältnis der Kartenarten. Setzt man die dritte Gleichung ein, bleibt ein System mit zwei

Unbekannten. Da Kartenzahlen ganzzahlig und nicht negativ sein müssen, ist die Lösung zusätzlich auf Plausibilität zu prüfen. Die Probe mit den Einnahmen bestätigt das Ergebnis von dreißig, sechzig und hundertzehn Karten.

Lösung zu Aufgabe 5 (3 BE/Punkte)

a) $\operatorname{rang} A \leq 3$, also $\dim \ker A \geq 1$ (2 P.).
b) $A(x_1 - x_2) = Ax_1 - Ax_2 = b - b = 0$ (1 P.).
Der Rang einer Matrix ist höchstens so groß wie ihre Zeilenzahl, hier also drei. Nach der Dimensionsformel bleibt für den Kern mindestens eine Dimension übrig. In b) nutzt man die Linearität der Matrixmultiplikation. Das Ergebnis begründet die Struktur der Lösungsmenge: spezielle Lösung plus Kern des homogenen Systems. Ein Beispiel ist jede Matrix mit drei Zeilen und vier Spalten, etwa die Koeffizienten eines Systems mit vier Unbekannten.