Lernzettel - Lineare Gleichungssysteme und Gauß-Algorithmus

Klasse: Studium 1 Semester

Einstieg: Verkehr in der Innenstadt

Eine Stadtverwaltung möchte wissen, wie viele Autos pro Stunde durch die Einbahnstraßen rund um den Marktplatz fahren. Gezählt wird nur an den Einfahrten und Ausfahrten. An jeder Kreuzung gilt aber eine einfache Bilanz: Was hineinfährt, muss auch wieder hinausfahren. Jede Kreuzung liefert so eine lineare Gleichung, und alle Kreuzungen zusammen bilden ein lineares Gleichungssystem. Hat es genau eine Lösung, kennt man den Verkehr in jeder Straße. Hat es unendlich viele, bleibt ein Spielraum, den die Planer gezielt nutzen können – etwa wenn eine Straße wegen einer Baustelle gesperrt wird. Ob ein System lösbar ist, wie viele Lösungen es hat und wie man sie systematisch findet, beantwortet der Gauß-Algorithmus, das wichtigste Rechenverfahren der linearen Algebra.

Lineare Gleichungssysteme und Matrizen

Definition: Lineare Gleichungssysteme und Matrizen

Ein **lineares Gleichungssystem** (LGS) mit m Gleichungen und n Unbekannten hat die Form $Ax = b$ mit der Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, dem Lösungsvektor x und der rechten Seite b. Man fasst es als **erweiterte Koeffizientenmatrix** $(A \mid b)$ zusammen. Das System heißt **homogen**, wenn $b = 0$; ein homogenes System hat immer die triviale Lösung $x = 0$.

Merke

Die **elementaren Zeilenumformungen** sind: Zeilen vertauschen, eine Zeile mit $\lambda \neq 0$ multiplizieren, ein Vielfaches einer Zeile zu einer anderen addieren. Sie ändern die Lösungsmenge nicht, weil jede Umformung umkehrbar ist.

Der Gauß-Algorithmus

Definition: Der Gauß-Algorithmus

Der **Gauß-Algorithmus** bringt $(A \mid b)$ mit Zeilenumformungen auf **Zeilenstufenform**: Unter jedem Pivotelement (dem ersten Eintrag $\neq 0$ einer Zeile) stehen nur Nullen, und die Pivots wandern nach rechts. Das **Gauß-Jordan-Verfahren** eliminiert auch oberhalb der Pivots und normiert sie auf 1 (reduzierte Zeilenstufenform). Der **Rang** von A ist die Anzahl der Pivots (Stufen); er ändert sich

unter Zeilenumformungen nicht. Die Spalten ohne Pivot gehören zu **freien Variablen**.

Merke

Satz (Lösbarkeit): Das System $Ax = b$ ist genau dann lösbar, wenn $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A \mid b)$. Dann gilt: Ist $\operatorname{rang} A = n$, ist die Lösung eindeutig; ist $\operatorname{rang} A$, gibt es $n - \operatorname{rang} A$ freie Parameter, also unendlich viele Lösungen. Eine Zeile $(0 \cdots 0 \mid c)$ mit $c \neq 0$ bedeutet Unlösbarkeit. Die Lösungsmenge hat die Struktur $L = x_p + L_0$ mit einer speziellen Lösung x_p und dem Lösungsraum L_0 von $Ax = 0$.

Inverse und Anwendungen

Definition: Inverse und Anwendungen

Eine quadratische Matrix A ist **invertierbar**, wenn $\operatorname{rang} A = n$. Die Inverse bestimmt man mit $(A \mid E) \to (E \mid A^{-1})$. Typische Anwendungen sind Polynominterpolation (Polynom durch gegebene Punkte), Netzwerke (Kirchhoffsche Regeln) und Mischungsaufgaben.

So gehst du vor: Gauß-Algorithmus

1. Erweiterte Koeffizientenmatrix $(A \mid b)$ aufstellen.
2. Mit Zeilenumformungen in Stufenform bringen.
3. Rang von A und $(A \mid b)$ vergleichen: Unlösbar, falls verschieden.
4. Freie Variablen wählen und von unten nach oben auflösen; Lösungsmenge angeben.

Beispiel 1 (eindeutig)

Das System $x + y = 5$, $x - y = 1$: Addieren gibt $2x = 6$, also $x = 3$, $y = 2$. Rang 2, eine Lösung.

Beispiel 2 (unlösbar)

$x + y = 1$, $2x + 2y = 3$: Zeile 2 minus zweimal Zeile 1 liefert $0 = 1$. Rang $A = 1 \neq 2 = \operatorname{rang}(A \mid b)$, keine Lösung.

Beispiel 3 (unendlich viele)

$x + 2y = 4$, $2x + 4y = 8$: Die zweite Gleichung ist das Doppelte der ersten. Rang 1, zwei Unbekannte, ein freier Parameter $y = t$: $L = \{(4 - 2t,\, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Zeilenstufenform und elementare Umformungen

Ein lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Unbekannten schreibt man kurz als $Ax = b$ mit der Koeffizientenmatrix A und der erweiterten Matrix $(A \mid b)$. Drei **elementare Zeilenumformungen** ändern die Lösungsmenge nicht: zwei Zeilen vertauschen, eine Zeile mit einer Zahl $\neq 0$ multiplizieren und ein Vielfaches einer Zeile zu einer anderen addieren. Jede dieser Umformungen lässt sich rückgängig machen, deshalb gehen keine Lösungen verloren und es kommen keine hinzu. Ziel ist die **Zeilenstufenform**: Jede Zeile beginnt mit mehr Nullen als die vorige, und die erste Zahl $\neq 0$ einer Zeile heißt Pivotelement. Bei der **reduzierten** Zeilenstufenform sind zusätzlich alle Pivotelemente gleich 1 und darüber stehen nur Nullen.

So gehst du vor: Gauß-Algorithmus

1. Erweiterte Matrix $(A \mid b)$ aufschreiben.
2. In der ersten Spalte ein Pivotelement $\neq 0$ wählen (notfalls Zeilen tauschen) und darunter durch Subtraktion von Vielfachen Nullen erzeugen.
3. Die erste Zeile festhalten und mit der restlichen Matrix ab der nächsten Spalte genauso verfahren.
4. Auftretende Zeilen $(0 \dots 0 \mid c)$ mit $c \neq 0$ bedeuten: keine Lösung.
5. Variablen ohne Pivotelement sind frei; sie bekommen Parameter $s, t, \dots$.
6. Von unten nach oben auflösen (Rückwärtseinsetzen) und die Probe in einer Ausgangsgleichung machen.

Beispiel 4 (Ein System mit drei Unbekannten)

Lösen Sie $x + y + z = 6$, $2x + 3y - z = 5$, $x - y + 2z = 5$.

$Z_2 - 2Z_1$ liefert $y - 3z = -7$, $Z_3 - Z_1$ liefert $-2y + z = -1$. Danach $Z_3 + 2Z_2$: $-5z = -15$, also $z = 3$. Rückwärts: $y = -7 + 9 = 2$ und $x = 6 - 2 - 3 = 1$. Probe in der dritten Gleichung: $1 - 2 + 6 = 5$. Die Lösung ist eindeutig: $L = \{(1, 2, 3)\}$.

Die Struktur der Lösungsmenge

Ein System heißt **homogen**, wenn $b = 0$ ist. Ein homogenes System hat immer die triviale Lösung $x = 0$, und seine Lösungsmenge ist der Kern von A, also ein Untervektorraum der Dimension $n - \operatorname{rang} A$. Für das inhomogene System gilt ein Strukturprinzip, das man aus der Theorie der Differentialgleichungen wiederkennen wird: Ist x_p irgendeine spezielle Lösung, so erhält man alle Lösungen, indem man die Lösungen des homogenen Systems addiert.

Satz: Lösbarkeit und Lösungsmenge

Rangkriterium: $Ax = b$ ist genau dann lösbar, wenn $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A \mid b)$. **Struktur:** Ist x_p eine Lösung, so ist $L = x_p + \ker A = \{x_p + v : Av = 0\}$. Die Lösung ist genau dann eindeutig, wenn zusätzlich $\operatorname{rang} A = n$ gilt. Bei quadratischem A ist das gleichbedeutend mit $\det A \neq 0$.

Fall	Rangbedingung	Lösungsmenge
keine Lösung	$\operatorname{rang} A$	$\emptyset$
genau eine Lösung	$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A\|b) = n$	ein Punkt
unendlich viele	$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A\|b)$	affiner Raum der Dimension $n - \operatorname{rang} A$

Beispiel 5 (Zwei freie Variablen)

Lösen Sie $x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2$, $2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 = 5$.

$Z_2 - 2Z_1$ liefert $x_3 + x_4 = 1$. Pivotelemente stehen bei x_1 und x_3; $x_2 = s$ und $x_4 = t$ sind frei. Es folgt $x_3 = 1 - t$ und $x_1 = 2 - 2s + x_3 - t = 3 - 2s - 2t$. In Vektorform: $x = (3,0,1,0)^T + s(-2,1,0,0)^T + t(-2,0,-1,1)^T$. Der erste Vektor ist eine spezielle Lösung, die beiden anderen bilden eine Basis des Kerns. Der Rang ist 2, die Lösungsmenge eine Ebene im $\mathbb{R}^4$.

Systeme mit Parametern

Oft hängen die Koeffizienten von einem Parameter ab, und gefragt ist, für welche Werte das System keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen hat. Man führt den Gauß-Algorithmus mit dem Parameter durch, vermeidet aber die Division durch Ausdrücke, die null werden könnten. Am Ende steht in der letzten Zeile ein Ausdruck wie $(a-5)z = c$; dann unterscheidet man die Fälle $a \neq 5$ und $a = 5$. Bei quadratischen Systemen hilft die Determinante: Sie zeigt, für welche Parameter die Lösung sicher eindeutig ist.

Beispiel 6 (Fallunterscheidung)

Untersuchen Sie $x + y + z = 1$, $x + 2y + 3z = 2$, $x + 3y + az = c$ in Abhängigkeit von a und c.

$Z_2 - Z_1$: $y + 2z = 1$; $Z_3 - Z_1$: $2y + (a-1)z = c - 1$; dann $Z_3 - 2Z_2$: $(a-5)z = c - 3$. Für $a \neq 5$ gibt es genau eine Lösung. Für $a = 5$ und $c = 3$ wird die letzte Zeile zu $0 = 0$: unendlich viele Lösungen, nämlich $z = t$, $y = 1 - 2t$, $x = t$. Für $a = 5$ und $c \neq 3$ entsteht der Widerspruch $0 = c - 3 \neq 0$: keine Lösung.

Gauß im Computer: Aufwand und Pivotsuche

Für ein System mit n Gleichungen braucht der Gauß-Algorithmus ungefähr $\frac{2}{3}n^3$ Rechenoperationen. Bei $n = 1000$ sind das rund $7 \cdot 10^8$ Operationen, die ein Laptop in Sekundenbruchteilen erledigt; bei Wettermodellen mit Millionen von Unbekannten braucht man spezielle Verfahren, die ausnutzen, dass fast alle Einträge null sind. Rechner arbeiten mit Gleitkommazahlen und runden. Teilt man durch ein sehr kleines Pivotelement, werden Rundungsfehler riesig verstärkt. Deshalb wählt man bei der **Spaltenpivotsuche** in jeder Spalte das betragsgrößte Element als Pivot. Diese kleine Änderung macht den Algorithmus in der Praxis stabil.

Anwendungen

Lineare Gleichungssysteme entstehen überall dort, wo Bilanzen aufgestellt werden: bei Strömen in elektrischen Netzen (Kirchhoffsche Regeln), beim Verkehrsfluss, beim Ausgleichen chemischer Reaktionsgleichungen, in der Statik von Brücken, bei der Interpolation von Messwerten und bei Mischungsaufgaben. Typisch für die Praxis ist auch der überbestimmte Fall: Es gibt mehr Messungen als Unbekannte, und wegen der Messfehler hat das System keine exakte Lösung. Dann sucht man die Lösung der **Normalengleichungen** $A^T A x = A^T b$, die die Summe der Fehlerquadrate minimiert (Methode der kleinsten Quadrate).

Beispiel 7 (Reaktionsgleichung ausgleichen)

Gleichen Sie die Verbrennung von Propan $a\,\mathrm{C_3H_8} + b\,\mathrm{O_2} \to c\,\mathrm{CO_2} + d\,\mathrm{H_2O}$ aus.

Atombilanzen: Kohlenstoff $3a = c$, Wasserstoff $8a = 2d$, Sauerstoff $2b = 2c + d$. Das homogene System hat einen eindimensionalen Kern. Mit $a = 1$ folgt $c = 3$, $d = 4$ und $2b = 6 + 4$, also $b = 5$. Die Gleichung lautet $\mathrm{C_3H_8} + 5\,\mathrm{O_2} \to 3\,\mathrm{CO_2} + 4\,\mathrm{H_2O}$. Jedes Vielfache wäre ebenfalls eine Lösung; man wählt die kleinsten ganzen Zahlen.

Achtung: Typische Fehler beim Gauß-Algorithmus

Die rechte Seite muss bei jeder Umformung mitgerechnet werden. Man darf nicht zwei Zeilen gleichzeitig mit sich gegenseitig verändern (etwa $Z_1 - Z_2$ und $Z_2 - Z_1$ im selben Schritt), sonst geht Information verloren. Eine Nullzeile $(0 \dots 0 \mid 0)$ bedeutet nicht „keine Lösung“, sondern eine überflüssige Gleichung. Bei Parametern darf man nur durch Ausdrücke teilen, von denen man weiß, dass sie nicht null sind. Und bei unendlich vielen Lösungen gehört die vollständige Parameterdarstellung zur Antwort, nicht nur eine einzelne Lösung.

Wusstest du? Zweitausend Jahre Eliminationsverfahren

Das Verfahren ist viel älter als Gauß. Das chinesische Rechenbuch „Neun Kapitel der Rechenkunst“ (um 200 v. Chr.) löst Aufgaben über Getreidegarben mit Rechenstäbchen auf einem Brett – genau mit den Zeilenumformungen, die wir heute benutzen. Carl Friedrich Gauß verwendete die Methode um 1809, um aus Beobachtungen die Bahn des Zwergplaneten Ceres zu berechnen, und verband sie mit der Methode der kleinsten Quadrate. Seitdem trägt sie seinen Namen.

Hinweis: Saubere Notation in der Klausur

Schreiben Sie neben jede neue Zeile, welche Umformung Sie ausgeführt haben, etwa „$Z_3 - 2Z_1$“. So können Korrektoren Ihre Rechnung nachvollziehen und Folgefehler fair bewerten. Rechnen Sie möglichst lange mit ganzen Zahlen: Multiplizieren Sie Zeilen lieber mit einer geeigneten Zahl, als früh Brüche zu erzeugen. Geben Sie am Ende die Lösungsmenge ausdrücklich an, bei Parametern in Vektorform, und machen Sie eine Probe mit einer der Ausgangsgleichungen.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Elementare Zeilenumformungen (Tauschen, Multiplizieren mit $\lambda \neq 0$, Addieren eines Vielfachen) ändern die Lösungsmenge nicht.
- Gauß-Algorithmus: Zeilenstufenform herstellen, dann rückwärts einsetzen; Variablen ohne Pivotelement sind frei.
- Rangkriterium: $Ax = b$ lösbar $\iff \operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A|b)$; eindeutig $\iff$ zusätzlich $\operatorname{rang} A = n$.
- Struktur: $L = x_p + \ker A$; homogene Systeme haben einen Untervektorraum der Dimension $n - \operatorname{rang} A$ als Lösungsmenge.
- Quadratische Systeme: eindeutig lösbar $\iff \det A \neq 0 \iff A$ invertierbar; dann $x = A^{-1}b$.
- Parameter: erst eliminieren, dann Fälle unterscheiden; nie durch Ausdrücke teilen, die null werden können.
- Anwendungen: Bilanzen (Kirchhoff, Verkehr, Chemie), Interpolation, Mischungen; überbestimmte Systeme mit Normalengleichungen $A^T Ax = A^T b$ lösen.

Achtung

Häufig werden beim Umformen Vorzeichen falsch übertragen oder die rechte Seite nicht mitumgeformt. Auch wird der Fall $\operatorname{rang} A$ übersehen und fälschlich eine Lösung angegeben. Bei Parametern darf man nicht durch einen Ausdruck teilen, der null sein kann, ohne diesen Fall getrennt zu behandeln.

Ottos Tipp

Führen Sie die Probe durch Einsetzen in alle Ausgangsgleichungen durch, und notieren Sie an jede Zeile die verwendete Umformung.