Arbeitsblatt - Lineare Gleichungssysteme und Gauß-Algorithmus

Klasse: Studium 1 Semester · 20

Der Rechenweg muss angegeben werden.

Aufgabe 1

Aufgabe 1 – Eindeutige Lösungen

Lösen Sie die Gleichungssysteme mit dem Gauß-Algorithmus. Notieren Sie jede Zeilenumformung und machen Sie die Probe.

a) $2x + 3y = 12, \quad x - y = 1$
b) $x + 2y + z = 8, \quad 2x + y - z = 1, \quad 3x - y + 2z = 7$

Aufgabe 2

Aufgabe 2 – Rang bestimmen

Bringen Sie die Matrizen auf Zeilenstufenform und bestimmen Sie den Rang.

a)

b)

c)

Aufgabe 3

Aufgabe 3 – Keine oder unendlich viele Lösungen

Gegeben sind die Gleichungen $x + y + z = 2$ und $x + 2y + 3z = 5$ sowie eine dritte Gleichung.

a) Lösen Sie das System mit der dritten Gleichung $2x + 3y + 4z = 8$.
b) Lösen Sie das System mit der dritten Gleichung $2x + 3y + 4z = 7$.
c) Deuten Sie beide Ergebnisse geometrisch als Lage von drei Ebenen.

Aufgabe 4

Aufgabe 4 – Homogene Systeme

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des homogenen Systems $Ax = 0$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Bringen Sie A auf Zeilenstufenform und nennen Sie die freien Variablen.
b) Geben Sie die Lösungsmenge in Parameterform und eine Basis an.
c) Warum muss ein homogenes System mit mehr Unbekannten als Gleichungen immer nichttriviale Lösungen haben?

Aufgabe 5

Aufgabe 5 – Spezielle und homogene Lösung

Gegeben ist das System $x + y - z = 1$, $2x + y + z = 4$.

a) Lösen Sie das System und schreiben Sie die Lösung als $x_p + t\,v$.
b) Prüfen Sie, dass v das zugehörige homogene System löst.
c) Ist $(1, 1, 1)$ eine Lösung? Welcher Wert von t gehört dazu?

Aufgabe 6

Aufgabe 6 – Fallunterscheidung mit Parameter

Untersuchen Sie das System $x + 2y + z = 3$, $2x + 5y + 3z = 5$, $x + 3y + az = c$ in Abhängigkeit von $a, c \in \mathbb{R}$.

a) Führen Sie den Gauß-Algorithmus durch.
b) Für welche a ist die Lösung eindeutig? Prüfen Sie mit der Determinante.
c) Bestimmen Sie für $a = 2$ die Werte von c, für die es Lösungen gibt, und geben Sie diese an.

Aufgabe 7

Aufgabe 7 – Im Campus-Café

Drei Studierende bezahlen im Café für ihre Bestellungen. Die Preise für Kaffee (K), Brezel (B) und Saft (S) sind gesucht.

Person	Kaffee	Brezel	Saft	Betrag
Lea	2	1	1	7,30 €
Jonas	1	2	2	8,30 €
Mia	3	1	0	7,50 €

a) Stellen Sie das Gleichungssystem auf.
b) Lösen Sie es mit dem Gauß-Algorithmus.
c) Ein Freund bestellt zwei Kaffee, zwei Brezeln und einen Saft und bezahlt mit einem 10-Euro-Schein. Wie viel Wechselgeld bekommt er?

Aufgabe 8

Aufgabe 8 – Chemie im Labor

Beim Ausgleichen einer Reaktionsgleichung muss jede Atomsorte links und rechts gleich oft vorkommen. Die unbekannten Faktoren erfüllen ein homogenes lineares Gleichungssystem.

a) Gleichen Sie $a\,\mathrm{Fe} + b\,\mathrm{O_2} \to c\,\mathrm{Fe_2O_3}$ aus.
b) Gleichen Sie $a\,\mathrm{CH_4} + b\,\mathrm{O_2} \to c\,\mathrm{CO_2} + d\,\mathrm{H_2O}$ aus.
c) Warum ist die Lösungsmenge immer ein Untervektorraum, und warum wählt man die kleinste ganzzahlige Lösung?

Aufgabe 9

Aufgabe 9 – Einbahnstraßen um den Marktplatz

Vier Einbahnstraßen umschließen einen Platz im Uhrzeigersinn: x_1 von A nach B, x_2 von B nach C, x_3 von C nach D und x_4 von D nach A (Autos pro Stunde). An den Kreuzungen fahren von außen zu bzw. ab:

Kreuzung	zufahrend	abfahrend
A	500	300
B	200	400
C	400	300
D	300	400

a) Stellen Sie für jede Kreuzung die Bilanzgleichung auf.
b) Lösen Sie das System mit $x_4 = t$ als Parameter.
c) Welche Werte von t sind sinnvoll? Bestimmen Sie den kleinsten möglichen Verkehr in jeder Straße.
d) Wegen einer Baustelle wird die Straße von D nach A gesperrt. Wie viele Autos fahren dann in den anderen Straßen?

Aufgabe 10

Aufgabe 10 – Ströme in einem Netzwerk

Eine 12-Volt-Batterie speist über einen Widerstand $R_1 = 2\,\Omega$ zwei parallele Widerstände $R_2 = R_3 = 4\,\Omega$. Für die Ströme gilt nach Kirchhoff: $I_1 = I_2 + I_3$ (Knotenregel), $2I_1 + 4I_2 = 12$ und $4I_2 - 4I_3 = 0$ (Maschenregel).

a) Schreiben Sie das System in Matrixform.
b) Lösen Sie es mit dem Gauß-Algorithmus.
c) Kontrollieren Sie mit dem Ersatzwiderstand $R = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$.
d) Wie groß ist die gesamte elektrische Leistung $P = U \cdot I_1$?

Aufgabe 11

Aufgabe 11 – Das Müsli

Ein Start-up mischt 500 g Müsli aus Haferflocken (H), Nüssen (N) und Rosinen (R). Die Nährwerte pro 100 g sind:

	Hafer	Nüsse	Rosinen
Eiweiß (g)	13	20	3
Fett (g)	7	50	1
Kohlenhydrate (g)	60	10	70

Die Mischung soll genau 62 g Eiweiß und 72 g Fett enthalten.
a) Stellen Sie ein Gleichungssystem für die Mengen h, n, r (in 100 g) auf.
b) Lösen Sie es und begründen Sie, dass die Lösung eindeutig ist.
c) Wie viele Kohlenhydrate enthält die Mischung?
d) Kann man auch 500 g mit 62 g Eiweiß und 72 g Fett ohne Rosinen mischen?

Aufgabe 12

Aufgabe 12 – Der Basketballwurf

Bei einem Freiwurf wird die Flugbahn des Balls gefilmt. In einem Koordinatensystem (Einheit: m) misst man die Punkte $(0|2)$, $(2|3{,}6)$ und $(4|4)$. Die Bahn soll durch eine Parabel $y = ax^2 + bx + c$ beschrieben werden.

a) Stellen Sie das lineare Gleichungssystem für a, b, c auf.
b) Lösen Sie es.
c) Bestimmen Sie die größte Höhe des Balls.
d) Der Korb hängt in $3{,}05$ m Höhe, horizontal 6 m vom Abwurfpunkt entfernt. Trifft der Ball? Beurteilen Sie das Modell.

Aufgabe 13

Aufgabe 13 – Getreidegarben aus China

Eine Aufgabe aus den „Neun Kapiteln der Rechenkunst“ (um 200 v. Chr.), modern formuliert: 3 Garben guter Ernte, 2 Garben mittlerer und 1 Garbe schlechter Ernte ergeben 39 Dou Korn. 2 gute, 3 mittlere und 1 schlechte ergeben 34 Dou, 1 gute, 2 mittlere und 3 schlechte ergeben 26 Dou.

a) Stellen Sie das System für den Ertrag g_1, g_2, g_3 je Garbe auf.
b) Lösen Sie es mit dem Gauß-Algorithmus.
c) Machen Sie die Probe in allen drei Gleichungen.

Aufgabe 14

Aufgabe 14 – Maschinen voll auslasten

Eine Werkstatt fertigt die Produkte P_1, P_2, P_3. Die Maschinenzeiten in Stunden je Stück

und die verfügbaren Stunden pro Woche sind:

Maschine	P_1	P_2	P_3	Kapazität
Fräse	1	2	1	35
Drehbank	2	1	3	50
Bohrer	1	1	1	25

a) Stellen Sie das System auf, wenn alle Maschinen voll ausgelastet werden sollen.
b) Lösen Sie es.
c) Die Kapazität der Fräse steigt auf 40 Stunden. Wie ändert sich der Plan? Ist er noch umsetzbar?

Aufgabe 15

Aufgabe 15 – Die beste Gerade durch Messwerte

Bei einem Versuch werden vier Messpunkte aufgenommen. Gesucht ist eine Gerade $y = c + mx$, die möglichst gut passt.

x	0	1	2	3
y	1	3	4	4

Setzt man alle Punkte ein, erhält man vier Gleichungen $Ax = b$ für die zwei Unbekannten c, m.
a) Stellen Sie A und b auf und zeigen Sie mit dem Rangkriterium, dass das System unlösbar ist.
b) Berechnen Sie $A^T A$ und $A^T b$.
c) Lösen Sie die Normalengleichungen $A^T A \binom{c}{m} = A^T b$.
d) Berechnen Sie die Abweichungen $r_i = y_i - (c + mx_i)$ und die Summe ihrer Quadrate.
e) Warum ist ein exakt passendes Polynom vom Grad 3 für Messdaten meist schlechter geeignet als die Ausgleichsgerade?

Aufgabe 16

Aufgabe 16 – Wärme in einer Platte

Eine quadratische Metallplatte wird am oberen Rand auf $100\,^\circ\mathrm{C}$ gehalten, die anderen drei Ränder auf $0\,^\circ\mathrm{C}$. Im Inneren betrachtet man vier Messpunkte: T_1 oben links, T_2 oben rechts, T_3 unten links, T_4 unten rechts. Im Gleichgewicht ist die Temperatur jedes Punktes der Mittelwert seiner vier Nachbarn (Randpunkte oder andere Messpunkte).

a) Stellen Sie die vier Gleichungen auf. Beispiel: $4T_1 = 100 + 0 + T_2 + T_3$.
b) Begründen Sie mit der Symmetrie, dass $T_1 = T_2$ und $T_3 = T_4$ gelten müsste.
c) Lösen Sie das System.
d) Prüfen Sie, dass die Lösung auch das ursprüngliche 4×4-System erfüllt.
e) Der Mittelwert der Randtemperaturen ist $25\,^\circ\mathrm{C}$. Vergleichen Sie mit dem Mittelwert der vier Innentemperaturen.

Aufgabe 17

Aufgabe 17 – Rundungsfehler im Computer

Ein Rechner arbeitet mit drei gültigen Ziffern. Er soll das System $0{,}0001x + y = 1$, $x + y = 2$ lösen. Die exakte Lösung ist $x = \frac{10000}{9999}$, $y = \frac{9998}{9999}$.

a) Runden Sie die exakte Lösung auf vier Dezimalen.
b) Lösen Sie ohne Zeilentausch: Ziehen Sie das $10\,000$-fache der ersten Zeile von der zweiten ab und runden Sie jedes Zwischenergebnis auf drei gültige Ziffern.
c) Lösen Sie mit Spaltenpivotsuche, also nach Vertauschen der Zeilen.
d) Erklären Sie, warum das kleine Pivotelement den Fehler verursacht.

Aufgabe 18

Aufgabe 18 – Zwei Parameter

Untersuchen Sie das System $x + y + az = 1$, $x + ay + z = 1$, $ax + y + z = c$ in Abhängigkeit von $a, c \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie $\det A = -(a-1)^2(a+2)$.
b) Für welche a gibt es genau eine Lösung?
c) Untersuchen Sie den Fall $a = 1$.
d) Untersuchen Sie den Fall $a = -2$ und bestimmen Sie für das passende c die Lösungsmenge.
e) Begründen Sie, warum man bei der Elimination nicht einfach durch $a - 1$ teilen darf.

Aufgabe 19

Aufgabe 19 – Drei Pumpen füllen ein Becken

Ein Schwimmbecken soll gefüllt werden. Die Pumpen A und B schaffen es zusammen in 4 Stunden, B und C zusammen in 6 Stunden, A und C zusammen in 5 Stunden. Jede Pumpe arbeitet mit konstanter Leistung (Anteil des Beckens pro Stunde: a, b, c).

a) Stellen Sie das lineare Gleichungssystem für a, b, c auf.
b) Lösen Sie es geschickt, indem Sie alle drei Gleichungen addieren.
c) Wie lange braucht jede Pumpe allein?
d) Wie lange dauert es, wenn alle drei gleichzeitig pumpen?
e) Warum wäre ein Ansatz mit den Füllzeiten selbst (statt der Leistungen) kein lineares System?

Aufgabe 20

Aufgabe 20 – Knobelaufgabe: Wie viele Lösungen sind möglich?

Beweisen Sie die folgenden allgemeinen Aussagen über ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit reellen Koeffizienten.

a) Sind $x_1 \neq x_2$ zwei Lösungen, so ist auch $x_1 + t(x_2 - x_1)$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ eine Lösung. Folgern Sie: Ein reelles lineares System hat 0, 1 oder unendlich viele Lösungen.

b) Zeigen Sie: Hat $Ax = b$ für ein quadratisches A und ein bestimmtes b genau eine Lösung, so hat $Ax = c$ für jedes c genau eine Lösung.
c) Über dem Körper $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ (mit $1 + 1 = 0$) gilt die Aussage aus a) nicht. Lösen Sie $x + y = 1$ über $\mathbb{F}_2$ und zählen Sie die Lösungen.
d) Ist das Mittel $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ zweier Lösungen wieder eine Lösung? Ist die Summe $x_1 + x_2$ eine Lösung?