Lösungen - Lineare Gleichungssysteme und Gauß-Algorithmus

Klasse: Studium 1 Semester

Lösung zu Aufgabe 1

a) Aus der zweiten Gleichung $x = 1 + y$; eingesetzt: $2 + 2y + 3y = 12$, also $y = 2$, $x = 3$. Mit Matrizen: $Z_1 \leftrightarrow Z_2$, dann $Z_2 - 2Z_1$: $5y = 10$. Probe: $6 + 6 = 12$, $3 - 2 = 1$. $L = \{(3, 2)\}$.
b) $Z_2 - 2Z_1$: $-3y - 3z = -15$, also $y + z = 5$. $Z_3 - 3Z_1$: $-7y - z = -17$. Dann $Z_3 + 7 \cdot (y + z = 5)$: $6z = 18$, $z = 3$. Rückwärts: $y = 2$, $x = 8 - 4 - 3 = 1$. Probe: $3 - 2 + 6 = 7$. $L = \{(1, 2, 3)\}$.
Erläuterung: Der Gauß-Algorithmus erzeugt unterhalb der Diagonale Nullen, damit die letzte Gleichung nur noch eine Unbekannte enthält. Danach setzt man von unten nach oben ein. Die Probe in einer Gleichung, die man beim Rückwärtseinsetzen nicht benutzt hat, deckt Rechenfehler zuverlässig auf.

Lösung zu Aufgabe 2

a) $Z_2 - 4Z_1 = (0, -3, -6)$, $Z_3 - 7Z_1 = (0, -6, -12)$; danach $Z_3 - 2Z_2 = (0, 0, 0)$. Zwei Stufen: Rang 2.
b) $Z_3 - Z_1 = (0, -1, 1)$; $Z_3 + Z_2 = (0, 0, 2)$. Drei Pivotelemente: Rang 3 (die Determinante ist $2 \neq 0$).
c) Alle Zeilen sind Vielfache von $(1, 2)$: nach Elimination bleiben zwei Nullzeilen, Rang 1.
Erläuterung: Der Rang ist die Anzahl der Zeilen, die nach der Elimination nicht null sind. Er gibt an, wie viele Gleichungen eines Systems wirklich unabhängig sind. Eine quadratische Matrix hat genau dann vollen Rang, wenn ihre Determinante nicht verschwindet.

Lösung zu Aufgabe 3

a) $Z_2 - Z_1$: $y + 2z = 3$. $Z_3 - 2Z_1$: $y + 2z = 4$. Subtraktion: $0 = 1$, ein Widerspruch. Keine Lösung ($\operatorname{rang} A = 2$, $\operatorname{rang}(A|b) = 3$).
b) Jetzt liefert $Z_3 - 2Z_1$ die Gleichung $y + 2z = 3$, die mit der zweiten übereinstimmt: Nullzeile. Mit $z = t$: $y = 3 - 2t$, $x = 2 - y - z = -1 + t$. $L = \{(-1 + t,\ 3 - 2t,\ t) : t \in \mathbb{R}\}$.
c) a) Die drei Ebenen haben keinen gemeinsamen Punkt (je zwei schneiden sich in parallelen Geraden). b) Die drei Ebenen schneiden sich in einer gemeinsamen Geraden mit dem Richtungsvektor $(1, -2, 1)$.

Lösung zu Aufgabe 4

a) $Z_2 - 2Z_1 = (0, 0, 3, 3)$. Pivotelemente in Spalte 1 und 3; frei sind x_2 und x_4.

b) $x_2 = s$, $x_4 = t$: $x_3 = -t$, $x_1 = -2s + x_3 = -2s - t$.
$L = \{s(-2,1,0,0)^T + t(-1,0,-1,1)^T\}$; Basis $(-2,1,0,0)^T$, $(-1,0,-1,1)^T$. Probe zweite Gleichung für den zweiten Vektor: $-2 + 0 - 1 + 3 = 0$.
c) Der Rang ist höchstens gleich der Anzahl m der Gleichungen. Mit $n > m$ folgt $\dim \ker A = n - \operatorname{rang} A \geq n - m > 0$.

Lösung zu Aufgabe 5

a) $Z_2 - 2Z_1$: $-y + 3z = 2$, also $y = 3z - 2$. Mit $z = t$: $y = -2 + 3t$,
$x = 1 - y + z = 3 - 2t$. Also $x = (3,-2,0)^T + t(-2,3,1)^T$.
b) $-2 + 3 - 1 = 0$ und $-4 + 3 + 1 = 0$. Der Vektor liegt im Kern.
c) $1 + 1 - 1 = 1$ und $2 + 1 + 1 = 4$: ja. Aus $z = t = 1$ folgt $(3-2,\ -2+3,\ 1) = (1,1,1)$.
Erläuterung: Die Lösungsmenge ist eine Gerade im Raum: ein Aufpunkt plus Vielfache eines Richtungsvektors aus dem Kern.

Lösung zu Aufgabe 6

a) $Z_2 - 2Z_1$: $y + z = -1$. $Z_3 - Z_1$: $y + (a-1)z = c - 3$. Dann $Z_3 - Z_2$: $(a-2)z = c - 2$.
b) Für $a \neq 2$ eindeutig. Kontrolle: $\det A = 1 \cdot (5a - 9) - 2 \cdot (2a - 3) + 1 \cdot (6 - 5) = a - 2$
.
c) Für $a = 2$ muss $c = 2$ sein. Dann $z = t$, $y = -1 - t$, $x = 3 - 2y - z = 5 + t$. Probe mit $t = 0$: $5 - 2 = 3$, $10 - 5 = 5$, $5 - 3 = 2$. Für $c \neq 2$ gibt es keine Lösung.
Erläuterung: Entscheidend ist die letzte Zeile der Stufenform. Steht dort ein Koeffizient ungleich null vor z, ist die Lösung eindeutig; verschwindet er, entscheidet die rechte Seite zwischen keiner und unendlich vielen Lösungen.

Lösung zu Aufgabe 7

a) $2K + B + S = 7{,}30$, $K + 2B + 2S = 8{,}30$, $3K + B = 7{,}50$.
b) Aus der dritten Gleichung $B = 7{,}50 - 3K$. $2\cdot$erste$-$zweite: $3K = 6{,}30$, also $K = 2{,}10$. Damit $B = 7{,}50 - 6{,}30 = 1{,}20$ und $S = 7{,}30 - 4{,}20 - 1{,}20 = 1{,}90$. Probe Jonas: $2{,}10 + 2{,}40 + 3{,}80 = 8{,}30$.
c) $2 \cdot 2{,}10 + 2 \cdot 1{,}20 + 1{,}90 = 4{,}20 + 2{,}40 + 1{,}90 = 8{,}50$ €. Wechselgeld: $1{,}50$ €.
Erläuterung: Ein geschickter Weg spart Rechenarbeit: Die dritte Gleichung enthält nur zwei Unbekannte, und eine Kombination der ersten beiden eliminiert Brezel und Saft gleichzeitig. Im Alltag erkennt man so aus wenigen Kassenbons die Einzelpreise.

Lösung zu Aufgabe 8

a) Eisen: $a = 2c$. Sauerstoff: $2b = 3c$. Mit $c = 2$: $a = 4$, $b = 3$. $4\,\mathrm{Fe} + 3\,\mathrm{O_2} \to 2\,\mathrm{Fe_2O_3}$.
b) C: $a = c$. H: $4a = 2d$. O: $2b = 2c + d$. Mit $a = 1$: $c = 1$, $d = 2$, $2b = 4$, $b = 2$.
$\mathrm{CH_4} + 2\,\mathrm{O_2} \to \mathrm{CO_2} + 2\,\mathrm{H_2O}$.
c) Das System ist homogen; mit jeder Lösung ist auch jedes Vielfache eine Lösung. Der Kern ist hier eindimensional. Man nimmt den kleinsten ganzzahligen positiven Vertreter, weil Moleküle nur ganzzahlig reagieren.

Lösung zu Aufgabe 9

a) A: $x_4 + 500 = x_1 + 300$. B: $x_1 + 200 = x_2 + 400$. C: $x_2 + 400 = x_3 + 300$. D: $x_3 + 300 = x_4 + 400$.
b) Aus D: $x_3 = 100 + t$. Aus C: $x_2 = x_3 - 100 = t$. Aus B: $x_1 = x_2 + 200 = 200 + t$. A ist dann automatisch erfüllt (die Summe aller Zu- und Abflüsse ist jeweils 1400). $\operatorname{rang} = 3$, eine freie Variable.
c) Alle $x_i \geq 0$ verlangt $t \geq 0$. Minimum bei $t = 0$: $x_1 = 200$, $x_2 = 0$, $x_3 = 100$, $x_4 = 0$.
d) $x_4 = 0$ bedeutet $t = 0$: 200 Autos von A nach B, keine von B nach C, 100 von C nach D. Die Sperrung ist möglich, ohne dass sich der Verkehr staut.

Lösung zu Aufgabe 10

a)  .

b) Aus der dritten Zeile $I_2 = I_3$, aus der ersten $I_1 = 2I_2$. Eingesetzt: $4I_2 + 4I_2 = 12$, also $I_2 = I_3 = 1{,}5$ A und $I_1 = 3$ A.
c) $R = 2 + \frac{16}{8} = 4\,\Omega$, $I_1 = \frac{12}{4} = 3$ A. Stimmt überein.
d) $P = 12 \cdot 3 = 36$ W.
Erläuterung: Die Knotenregel sagt, dass sich Ströme an einer Verzweigung aufteilen; die Maschenregel, dass die Spannungen in jedem geschlossenen Umlauf zusammen null ergeben.

Lösung zu Aufgabe 11

a) $h + n + r = 5$, $13h + 20n + 3r = 62$, $7h + 50n + r = 72$.
b) $\det = 1 \cdot (20 - 150) - 1 \cdot (13 - 21) + 1 \cdot (650 - 140) = 388 \neq 0$: eindeutig. Gauß: $Z_2 - 13Z_1$: $7n - 10r = -3$; $Z_3 - 7Z_1$: $43n - 6r = 37$. Daraus $n = 1$, $r = 1$, $h = 3$. Also 300 g Hafer, 100 g Nüsse, 100 g Rosinen.
c) $60 \cdot 3 + 10 \cdot 1 + 70 \cdot 1 = 260$ g Kohlenhydrate.
d) Nein: Die Lösung ist eindeutig und enthält $r = 1 \neq 0$. Mit $r = 0$ hätte das System mit drei Gleichungen in zwei Unbekannten keine Lösung.

Lösung zu Aufgabe 12

a) $c = 2$, $4a + 2b + c = 3{,}6$, $16a + 4b + c = 4$.
b) Mit $c = 2$: $4a + 2b = 1{,}6$ und $16a + 4b = 2$. Zweimal die erste von der zweiten abziehen: $8a = -1{,}2$, $a = -0{,}15$; $b = \frac{1{,}6 + 0{,}6}{2} = 1{,}1$. $y = -0{,}15x^2 + 1{,}1x + 2$.
c) Scheitel bei $x = \frac{1{,}1}{0{,}3} \approx 3{,}67$ m, Höhe $y \approx 4{,}02$ m.
d) $y(6) = -0{,}15 \cdot 36 + 6{,}6 + 2 = 3{,}20$ m: Der Ball fliegt etwa 15 cm über dem Korbring. Drei Messpunkte bestimmen die Parabel exakt, Messfehler wirken sich deshalb stark aus.

Lösung zu Aufgabe 13

a) $3g_1 + 2g_2 + g_3 = 39$, $2g_1 + 3g_2 + g_3 = 34$, $g_1 + 2g_2 + 3g_3 = 26$.
b) Zeilen tauschen, sodass $g_1 + 2g_2 + 3g_3 = 26$ oben steht. $Z_2 - 2Z_1$: $-g_2 - 5g_3 = -18$. $Z_3 - 3Z_1$: $-4g_2 - 8g_3 = -39$. Dann $Z_3 - 4Z_2$: $12g_3 = 33$, $g_3 = \frac{11}{4} = 2{,}75$. Rückwärts: $g_2 = 18 - 5 \cdot 2{,}75 = 4{,}25$, $g_1 = 26 - 8{,}5 - 8{,}25 = 9{,}25$.
c) $27{,}75 + 8{,}5 + 2{,}75 = 39$; $18{,}5 + 12{,}75 + 2{,}75 = 34$; $9{,}25 + 8{,}5 + 8{,}25 = 26$. Alle stimmen.
Erläuterung: Der Zeilentausch zu Beginn bringt eine Zeile mit dem Koeffizienten 1 nach oben und vermeidet Brüche bei der Elimination. Die chinesischen Rechner verwendeten auf ihrem Rechenbrett genau dieses Verfahren.

Lösung zu Aufgabe 14

a) $x + 2y + z = 35$, $2x + y + 3z = 50$, $x + y + z = 25$.
b) Erste minus dritte Gleichung: $y = 10$. Dann $x + z = 15$ und $2x + 3z = 40$: $z = 10$, $x = 5$. Es werden 5 Stück P_1, 10 Stück P_2 und 10 Stück P_3 gefertigt.
c) Dann $y = 15$, $x + z = 10$, $2x + 3z = 35$: $z = 15$, $x = -5$. Eine negative Stückzahl ist unmöglich: Bei voller Auslastung aller Maschinen gibt es keinen sinnvollen Plan, eine Maschine muss Leerlauf haben.

Lösung zu Aufgabe 15

a) , $b = (1, 3, 4, 4)^T$. $\operatorname{rang} A = 2$, aber $\operatorname{rang}(A|b) = 3$ (die Punkte liegen

nicht auf einer Geraden): unlösbar.
b) $A^TA = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}$ (Anzahl, $\sum x_i$, $\sum x_i^2$), $A^Tb = \begin{pmatrix} 12 \\ 23 \end{pmatrix}$ ($\sum y_i$, $\sum x_iy_i$).
c) $4c + 6m = 12$, $6c + 14m = 23$. Determinante $56 - 36 = 20$: $c = \frac{168-138}{20} = 1{,}5$, $m = \frac{92-72}{20} = 1$. Ausgleichsgerade $y = 1{,}5 + x$.
d) $r = (-0{,}5;\ 0{,}5;\ 0{,}5;\ -0{,}5)$, Quadratsumme $4 \cdot 0{,}25 = 1$. Die Abweichungen summieren sich zu 0.
e) Das Polynom würde auch die Messfehler genau nachbilden und zwischen den Punkten stark schwingen. Die Gerade glättet die Fehler und beschreibt den Trend.

Lösung zu Aufgabe 16

a) $4T_1 = 100 + T_2 + T_3$, $4T_2 = 100 + T_1 + T_4$, $4T_3 = T_1 + T_4$, $4T_4 = T_2 + T_3$.
b) Die Anordnung ist spiegelsymmetrisch zur senkrechten Mittellinie. Weil das System eindeutig lösbar ist, muss die Lösung dieselbe Symmetrie haben.
c) Mit $T_1 = T_2 = u$, $T_3 = T_4 = v$: $3u - v = 100$ und $3v = u$. Also $8v = 100$, $v = 12{,}5$, $u = 37{,}5$.
d) $4 \cdot 37{,}5 = 150 = 100 + 37{,}5 + 12{,}5$; $4 \cdot 12{,}5 = 50 = 37{,}5 + 12{,}5$. Alle vier Gleichungen sind erfüllt.

e) $\frac{2\cdot 37{,}5+2\cdot 12{,}5}{4}=25$. Beide Mittelwerte stimmen überein – ein Zeichen für das Gleichgewicht der Wärmeleitung.

Lösung zu Aufgabe 17

a) $x\approx 1{,}0001$, $y\approx 0{,}9999$.
b) $(1-10000)y=2-10000$, gerundet $-1{,}00\cdot 10^4\,y=-1{,}00\cdot 10^4$, also $y=1{,}00$. Dann $0{,}0001x=1-1=0$, also $x=0$. Völlig falsch.
c) Zeilen tauschen: $x+y=2$. $Z_2-0{,}0001Z_1$: $(1-0{,}0001)y=1-0{,}0002$, gerundet $1{,}00\,y=1{,}00$, $y=1{,}00$, $x=2-1=1{,}00$. Das ist auf drei Ziffern richtig.
d) Teilen durch $0{,}0001$ vergrößert den Faktor auf $10\,000$. Die Information der zweiten Gleichung geht beim Runden verloren, und der kleine Fehler in y wird beim Rückwärtseinsetzen mit $10\,000$ multipliziert.

Lösung zu Aufgabe 18

a) Sarrus: $\det A=a+a+a-a^3-1-1=-a^3+3a-2=-(a-1)^2(a+2)$ (Probe mit $a=0$: -2).
b) Für $a\neq 1$ und $a\neq -2$ ist $\det A\neq 0$: genau eine Lösung.
c) Alle drei Zeilen lauten $x+y+z=\ldots$ mit rechten Seiten $1,1,c$. Für $c=1$: $L=\{(1-s-t,s,t)\}$, eine Ebene. Für $c\neq 1$: keine Lösung.
d) Die Summe der drei Zeilen der Koeffizientenmatrix ist 0. Lösbar nur, wenn auch $1+1+c=0$, also $c=-2$. Dann: Z_2-Z_1 liefert $-3y+3z=0$, $y=z=t$, und $x=1-t+2t=1+t$. $L=\{(1+t,t,t)\}$.
e) Für $a=1$ wäre das eine Division durch null. Man muss die Fälle, in denen ein Pivotausdruck verschwindet, gesondert behandeln.

Lösung zu Aufgabe 19

a) $a+b=\frac14$, $b+c=\frac16$, $a+c=\frac15$.
b) Summe: $2(a+b+c)=\frac{15+10+12}{60}=\frac{37}{60}$, also $a+b+c=\frac{37}{120}$. Dann $c=\frac{37}{120}-\frac{30}{120}=\frac{7}{120}$, $a=\frac{37}{120}-\frac{20}{120}=\frac{17}{120}$, $b=\frac{37}{120}-\frac{24}{120}=\frac{13}{120}$.
c) A: $\frac{120}{17}\approx 7{,}06$ h, B: $\frac{120}{13}\approx 9{,}23$ h, C: $\frac{120}{7}\approx 17{,}14$ h.
d) $\frac{120}{37}\approx 3{,}24$ h, also etwa 3 Stunden und 15 Minuten.
e) Bei Füllzeiten t_A,t_B gilt $\frac{1}{t_A}+\frac{1}{t_B}=\frac14$ – die Unbekannten stehen im Nenner. Erst die Leistungen $a=\frac{1}{t_A}$ machen das System linear.

Lösung zu Aufgabe 20

a) $A(x_1+t(x_2-x_1))=Ax_1+t(Ax_2-Ax_1)=b+t(b-b)=b$. Da $x_2-x_1\neq 0$, sind diese Punkte für verschiedene t verschieden. Gibt es also mehr als eine Lösung, gibt es unendlich viele. □
b) Eindeutigkeit bedeutet $\ker A=\{0\}$ (sonst wäre $x+v$ eine zweite Lösung). Bei quadratischem A folgt mit der Dimensionsformel $\operatorname{rang} A=n$, also ist A invertierbar und $x=A^{-1}c$ die einzige Lösung von $Ax=c$. □

c) Über $\mathbb{F}_2$ gibt es nur die Lösungen $(1,0)$ und $(0,1)$: genau zwei. Der Parameter t kann nur 0 oder 1 sein; die Gerade hat nur zwei Punkte.
d) $A\frac{x_1+x_2}{2} = \frac{b+b}{2} = b$: ja. $A(x_1+x_2) = 2b$: nur für $b=0$ eine Lösung. Lösungsmengen inhomogener Systeme sind affine, keine linearen Räume.