Klassenarbeit - Lineare Abbildungen und Matrizen

Klasse: Studium 1 Semester · Dauer: 60 Minuten · /20

Name:	Datum:	**Note: /20**

Aufgabe	1	2	3	4	5	Gesamt
Punkte	3	5	5	4	3	**20**
Note						

Der Rechenweg muss angegeben werden.

Aufgabe 1 (3 BE/Punkte)

Aufgabe 1 – Darstellungsmatrix

Gegeben ist $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x - y,\ 2y + z)$.

a) Zeigen Sie, dass f linear ist, und geben Sie die Matrix A an.
b) Berechnen Sie $f(1, 2, 3)$ mit der Matrix.

Aufgabe 2 (5 BE/Punkte)

Aufgabe 2 – Produkt und Inverse

Gegeben sind $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie AB und BA.
b) Berechnen Sie A^{-1} und machen Sie die Probe.
c) Berechnen Sie $\det(AB)$ auf zwei Arten.

Aufgabe 3 (5 BE/Punkte)

Aufgabe 3 – Kern, Bild, Rang

Gegeben ist .

a) Bestimmen Sie den Rang von A.
b) Bestimmen Sie eine Basis des Kerns.
c) Geben Sie eine Basis des Bildes an und prüfen Sie die Dimensionsformel.

Aufgabe 4 (4 BE/Punkte)

Aufgabe 4 – Bäckerei mit zwei Stufen

Eine Bäckerei braucht für die Teige T_1, T_2 die Zutaten Mehl (M) und Zucker (Z) gemäß $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ (Zeilen: M, Z; Spalten: T_1, T_2; in 100 g). Für je ein Blech Brezeln (B) und ein Blech Kuchen (K) braucht sie die Teige gemäß $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (Zeilen: T_1, T_2; Spalten: B, K; in Portionen).

a) Berechnen Sie $C = AB$ und deuten Sie c_{22}.
b) Wie viel Mehl und Zucker braucht man für 5 Bleche Brezeln und 10 Bleche Kuchen?

Aufgabe 5 (3 BE/Punkte)

Aufgabe 5 – Basiswechsel

Gegeben ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ und die Basis $b_1 = (1, 1)^T$, $b_2 = (1, -1)^T$.

a) Bestimmen Sie die Matrix von $x \mapsto Ax$ in der Basis b_1, b_2.
b) Berechnen Sie damit A^4.