Lösungen zur Klassenarbeit - Lineare Abbildungen und Matrizen

Klasse: Studium 1 Semester · Dauer: 60 Minuten · /20

Lösung zu Aufgabe 1 (3 BE/Punkte)

a) $f(x) = Ax$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (Spalten $f(e_1) = (1, 0)$, $f(e_2) = (-1, 2)$, $f(e_3) = (0, 1)$); Matrixabbildungen sind linear (2 P.).
b) $A(1, 2, 3)^T = (1 - 2,\ 4 + 3)^T = (-1, 7)^T$ (1 P.).
Die Bilder der Einheitsvektoren werden als Spalten notiert; die Matrix hat zwei Zeilen, weil der Zielraum zweidimensional ist, und drei Spalten, weil der Ausgangsraum dreidimensional ist. Jede Abbildung der Form $x \mapsto Ax$ ist linear. Kontrolle in b): Die Abbildungsvorschrift ergibt direkt $1 - 2 = -1$ und $2 \cdot 2 + 3 = 7$.

Lösung zu Aufgabe 2 (5 BE/Punkte)

a) $AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; verschieden (2 P.).
b) $\det A = 1$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2-1 & -2+2 \\ 1-1 & -1+2 \end{pmatrix} = E$ (2 P.).
c) Direkt: $2 \cdot 1 - 0 \cdot 1 = 2$. Produktsatz: $\det A \cdot \det B = 1 \cdot 2 = 2$ (1 P.).
Beim Produkt rechnet man Zeile mal Spalte; dass AB und BA verschieden sind, zeigt die fehlende Kommutativität. Für die Inverse einer 2×2-Matrix vertauscht man die Diagonaleinträge, ändert die Vorzeichen der Nebendiagonale und teilt durch die Determinante 1. Der Produktsatz liefert in c) dieselbe Zahl wie die direkte Rechnung.

Lösung zu Aufgabe 3 (5 BE/Punkte)

a) $Z_2 - Z_1 = (1, 0, 1) = Z_3$: Nach Elimination bleibt eine Nullzeile, $\operatorname{rang} A = 2$ (2 P.).
b) $x + z = 0$, $x + y + 2z = 0$: $z = t$, $x = -t$, $y = -t$. Kern $= \operatorname{span}\{(-1, -1, 1)^T\}$ (2 P.).
c) Bild $= \operatorname{span}\{(1, 2, 1)^T, (1, 1, 0)^T\}$; $3 = 1 + 2$ (1 P.).
Die Zeilenumformung zeigt, dass eine Zeile von den anderen abhängt; deshalb ist der Rang zwei. Den Kern erhält man aus dem homogenen System mit der freien Variablen z. Als Bildbasis nimmt man die Spalten mit Pivotelementen. Die Dimensionsformel $3 = 1 + 2$ dient als Kontrolle; ein Widerspruch dort deutet auf einen Rechenfehler hin.

Lösung zu Aufgabe 4 (4 BE/Punkte)

a) $C = \begin{pmatrix} 0+2 & 2+2 \\ 0+1 & 6+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$; $c_{22} = 7$: Ein Blech Kuchen braucht insgesamt 700 g Zucker (2 P.).
b) $C(5, 10)^T = (10 + 40,\ 5 + 70)^T = (50, 75)^T$: 5 kg Mehl und $7{,}5$ kg Zucker (2 P.).

Die Gesamtbedarfsmatrix entsteht, indem man die Rohstoffmatrix von links mit der Teigmatrix multipliziert; die Reihenfolge der Faktoren folgt der Produktionsrichtung. Der Eintrag in Zeile zwei, Spalte zwei gibt den Zucker für ein Blech Kuchen an. Den Gesamtbedarf berechnet man, indem man die Matrix mit dem Auftragsvektor multipliziert und die Einheiten zurückrechnet.

Lösung zu Aufgabe 5 (3 BE/Punkte)

a) $Ab_1 = (3,3)^T = 3b_1$, $Ab_2 = (-1,1)^T = -b_2$: Matrix $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (2 P.).

b) $A^4 = T\,\mathrm{diag}(81,1)\,T^{-1}$ mit $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $T^{-1} = \frac{1}{2}T$:

$A^4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 81 & 1 \\ 81 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 & 40 \\ 40 & 41 \end{pmatrix}$ (1 P.).

Die neuen Basisvektoren werden von A nur gestreckt, deshalb ist die Matrix in dieser Basis diagonal mit den Faktoren 3 und -1. Potenzen einer Diagonalmatrix entstehen durch Potenzieren der Einträge. Mit $T^{-1} = \frac{1}{2}T$ erhält man A^4; Kontrolle durch zweimaliges Quadrieren: $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, dessen Quadrat dasselbe Ergebnis liefert.