Lernzettel - Lineare Abbildungen und Matrizen

Klasse: Studium 1 Semester

Einstieg: Millionen Matrizen pro Sekunde

Wenn sich in einem Computerspiel die Kamera dreht, berechnet die Grafikkarte für jedes Bild die neue Lage von Millionen Eckpunkten. Jede Drehung, jede Streckung und jede Projektion auf den Bildschirm ist eine lineare Abbildung, und jede lineare Abbildung wird durch eine Matrix beschrieben. Das Hintereinanderausführen zweier Bewegungen entspricht dem Produkt ihrer Matrizen. Die Grafikkarte tut also im Grunde nichts anderes, als Matrizen mit Vektoren zu multiplizieren – sehr schnell und sehr oft. In diesem Kapitel lernen Sie, warum das funktioniert: Eine lineare Abbildung ist durch die Bilder der Basisvektoren vollständig festgelegt, und diese Bilder stehen als Spalten in der Matrix.

Lineare Abbildungen

Definition: Lineare Abbildungen

Eine Abbildung $f : V \to W$ zwischen Vektorräumen über K heißt **linear**, wenn $f(u+v) = f(u) + f(v)$ und $f(\lambda v) = \lambda f(v)$ für alle $u, v \in V$, $\lambda \in K$ gelten. Insbesondere ist $f(0) = 0$. Beispiele: $x \mapsto Ax$ für eine Matrix A, die Ableitung $D : P_n \to P_{n-1}$, Drehungen und Spiegelungen. $g(x, y) = (x + 1, y)$ ist nicht linear, weil $g(0, 0) \neq 0$. Eine lineare Abbildung ist durch die Bilder einer Basis eindeutig festgelegt.

Satz

Der **Kern** $\ker f = \{v \in V \mid f(v) = 0\}$ und das **Bild** $\operatorname{im} f = f(V)$ sind Unterräume von V bzw. W. Satz: f ist genau dann injektiv, wenn $\ker f = \{0\}$. Es gilt die **Dimensionsformel** $\dim V = \dim \ker f + \dim \operatorname{im} f$ (Rangsatz).

Darstellungsmatrix und Matrizenmultiplikation

Definition: Darstellungsmatrix und Matrizenmultiplikation

Ist $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V und $(w_1, \ldots, w_m)$ eine Basis von W, so hat f die **Darstellungsmatrix** $A \in K^{m \times n}$, deren j-te Spalte die Koordinaten von $f(v_j)$ sind. Für Koordinatenvektoren gilt $f(x) = Ax$. Der Rang von A ist $\dim \operatorname{im} f$. Das **Matrizenprodukt** $(AB)_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj}$ (Zeile mal Spalte) entspricht der Komposition: $A_{g \circ f} = A_g A_f$. Es ist assoziativ und distributiv, aber im Allgemeinen **nicht kommutativ**. Für die Transponierte gilt $(AB)^T = B^T A^T$.

Inverse Matrizen und Basiswechsel

Definition: Inverse Matrizen und Basiswechsel

Eine quadratische Matrix A heißt **invertierbar**, wenn es A^{-1} mit $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ gibt. Äquivalent: $\operatorname{rang} A = n$, $\ker A = \{0\}$, $\det A \neq 0$. Es gilt $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Für 2×2: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Beim **Basiswechsel** mit Transformationsmatrix T (Spalten: neue Basisvektoren) hat dieselbe Abbildung die Matrix $A' = T^{-1}AT$.

So gehst du vor: Kern, Bild und Darstellungsmatrix

1. Darstellungsmatrix aus den Bildern der Basisvektoren als Spalten aufstellen.
2. Kern: $Ax = 0$ mit Gauß lösen.
3. Bild: von den Spalten aufgespannt, Dimension = Rang.
4. Dimensionsformel $\dim \ker + \dim \operatorname{im} = \dim V$ zur Kontrolle nutzen.

Beispiel 1 (Darstellungsmatrix)

$f(x, y, z) = (x + 2y,\ y - z)$. Bilder der Standardbasis: $f(e_1) = (1, 0)$, $f(e_2) = (2, 1)$, $f(e_3) = (0, -1)$. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Beispiel 2 (Kern und Bild)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$: Rang 1. Kern: $x + 2y = 0$, also $\ker A = \operatorname{span}\{(-2, 1)\}$. Bild: $\operatorname{span}\{(1, 2)\}$. Dimensionsformel: $1 + 1 = 2$ ✓.

Beispiel 3 (Produkt)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$: $AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Also $AB \neq BA$.

Linearität nachweisen und widerlegen

Eine Abbildung $f : V \to W$ zwischen Vektorräumen über demselben Körper heißt linear, wenn sie Summen und Vielfache respektiert: $f(u + v) = f(u) + f(v)$ und $f(\lambda v) = \lambda f(v)$. Beide Bedingungen lassen sich zu einer einzigen zusammenfassen: $f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$ für alle Vektoren und Skalare. Aus der Definition folgt sofort $f(0) = 0$. Diese Folgerung ist ein bequemer Schnelltest: Wird der Nullvektor nicht auf den Nullvektor abgebildet, kann f nicht linear sein. Umgekehrt beweist $f(0) = 0$ noch keine Linearität.

So gehst du vor: Linearität prüfen

1. Schnelltest: Ist $f(0) = 0$? Falls nein, ist f nicht linear.
2. Kommen Produkte von Koordinaten, Quadrate, Beträge, Wurzeln oder konstante Summanden vor, nach einem Gegenbeispiel suchen (etwa $f(2v) \neq 2f(v)$).
3. Sonst allgemein nachrechnen: $f(\lambda u + \mu v)$ ausschreiben und in $\lambda f(u) + \mu f(v)$ umformen.
4. Bei Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$: Lässt sich $f(x) = Ax$ mit einer Matrix A schreiben, ist f linear.

Beispiel 4 (Linear oder nicht?)

Untersuchen Sie $f(x, y) = (2x - y,\ x + 3y)$ und $g(x, y) = (x + y,\ xy)$.

Für f gilt $f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, also ist f linear. Für g ist zwar $g(0, 0) = (0, 0)$, aber $g(2, 2) = (4, 4)$ und $2g(1, 1) = (4, 2)$. Die zweite Komponente verletzt die Homogenität, g ist nicht linear.

Kern, Bild und die Dimensionsformel

Der **Kern** $\ker f = \{v \in V : f(v) = 0\}$ ist ein Untervektorraum von V, das **Bild** $\operatorname{im} f = \{f(v) : v \in V\}$ ein Untervektorraum von W. Der Kern misst, wie viel Information die Abbildung „verschluckt“: f ist genau dann injektiv, wenn $\ker f = \{0\}$ gilt. Das Bild entscheidet über die Surjektivität. Für eine Matrix A ist der Kern die Lösungsmenge des homogenen Systems $Ax = 0$, und das Bild wird von den Spalten erzeugt. Seine Dimension heißt **Rang** von A.

Satz: Dimensionsformel (Rangsatz)

Ist V endlichdimensional und $f : V \to W$ linear, so gilt

$$\dim V = \dim \ker f + \dim \operatorname{im} f.$$

Für eine $m \times n$-Matrix bedeutet das: $n = \dim \ker A + \operatorname{rang} A$. Insbesondere ist für $\dim V = \dim W$ eine lineare Abbildung genau dann injektiv, wenn sie surjektiv ist.

Beispiel 5 (Rangsatz kontrollieren)

Bestimmen Sie Kern und Bild von $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Gauß: $Z_2 - 2Z_1$ liefert die Zeile $(0, 0, -2)$. Also ist $x_3 = 0$ und $x_1 = -2x_2$. Der Kern ist $\operatorname{span}\{(-2, 1, 0)^T\}$, eindimensional. Die erste und die dritte Spalte $(1, 2)^T$, $(1, 0)^T$ sind linear unabhängig, das Bild ist also ganz $\mathbb{R}^2$, der Rang 2. Probe mit dem Rangsatz: $3 = 1 + 2$.

Warum Zeile mal Spalte?

Die Regel der Matrizenmultiplikation ist keine Willkür. Sind $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ linear mit den Matrizen B und A, so ist auch die Verkettung $f \circ g$ linear. Ihre j-te Spalte ist das Bild des j-ten Einheitsvektors: $f(g(e_j)) = A(Be_j)$, also A mal die j-te Spalte von B. Genau so ist das Produkt AB definiert. Daraus erklären sich alle Rechenregeln: Das Produkt ist assoziativ, weil die Verkettung von Abbildungen assoziativ ist, und im Allgemeinen nicht kommutativ, weil es auf die Reihenfolge zweier Bewegungen ankommt. Erst drehen und dann spiegeln ergibt meist etwas anderes als erst spiegeln und dann drehen. Beachten Sie die Leserichtung: In AB wird zuerst B, dann A angewendet.

Merke: Wichtige Abbildungen der Ebene

Abbildung	Matrix	Determinante
Drehung um α	$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$	1
Spiegelung an der x-Achse	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	-1
Streckung mit Faktor k	$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$	k^2
Scherung in x-Richtung	$\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	1
Projektion auf die x-Achse	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	0

Der Betrag der Determinante gibt an, mit welchem Faktor Flächen gestreckt werden; ein negatives Vorzeichen zeigt eine Spiegelung an.

Inverse Matrizen mit dem Gauß-Jordan-Verfahren

Eine quadratische Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn die zugehörige Abbildung bijektiv ist, also genau dann, wenn $\operatorname{rang} A = n$ oder $\det A \neq 0$ gilt. Für 2×2-Matrizen gibt es eine Formel: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Für größere Matrizen schreibt man $(A \mid E)$ nebeneinander und formt mit elementaren Zeilenumformungen so lange um, bis links die Einheitsmatrix steht. Rechts steht dann A^{-1}. Entsteht links eine Nullzeile, ist A nicht invertierbar.

Beispiel 6 (Inverse einer 3×3-Matrix)

Invertieren Sie .

Aus $(A|E)$ wird mit $Z_3 - Z_1$ die dritte Zeile $(0, 0, -1 \mid -1, 0, 1)$, nach Multiplikation mit

-1 also $(0,0,1\,|\,1,0,-1)$. Dann $Z_1 - 2Z_3$: $(1,0,0\,|\,-1,0,2)$. Ergebnis:

. Probe: Die erste Zeile von A mal die erste Spalte von A^{-1} ergibt $-1+0+2=1$, die übrigen Produkte liefern ebenso die Einheitsmatrix.

Basiswechsel und ähnliche Matrizen

Die Matrix einer linearen Abbildung hängt von der gewählten Basis ab. Sind die neuen Basisvektoren $b_1, \dots, b_n$ die Spalten der invertierbaren Matrix T, so hat die Abbildung $x \mapsto Ax$ bezüglich der neuen Basis die Matrix $T^{-1}AT$. Matrizen, die so auseinander hervorgehen, heißen **ähnlich**; sie beschreiben dieselbe Abbildung aus verschiedenen Blickwinkeln und haben deshalb dieselbe Determinante, dieselbe Spur und denselben Rang. Geschickt gewählte Basen machen die Matrix besonders einfach, im besten Fall diagonal. Das ist der Ausgangspunkt der Eigenwerttheorie im nächsten Kapitel.

Beispiel 7 (Eine Spiegelung wird diagonal)

Die Spiegelung an der Geraden $y = x$ hat die Matrix $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie ihre Matrix in der Basis $b_1 = (1,1)^T$, $b_2 = (1,-1)^T$.

Es gilt $Sb_1 = b_1$ (Punkte auf der Spiegelachse bleiben fest) und $Sb_2 = (-1,1)^T = -b_2$ (senkrecht zur Achse wird umgeklappt). In der neuen Basis lautet die Matrix daher $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Rechnerisch: $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $T^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ und $T^{-1}ST = \operatorname{diag}(1,-1)$.

Der Vektorraum der linearen Abbildungen

Lineare Abbildungen kann man nicht nur verketten, sondern auch addieren und mit Zahlen multiplizieren: $(f+g)(v) = f(v) + g(v)$ und $(\lambda f)(v) = \lambda f(v)$. Die Menge aller linearen Abbildungen von V nach W ist damit selbst ein Vektorraum, und bei $\dim V = n$, $\dim W = m$ entspricht er dem Raum der $m \times n$-Matrizen mit der Dimension mn. Die Matrix der Summe ist die Summe der Matrizen, die Matrix des Vielfachen das Vielfache der Matrix. Für Matrizenprodukte gelten die Distributivgesetze $A(B+C) = AB + AC$ und $(A+B)C = AC + BC$, außerdem $(AB)^T = B^T A^T$. Die quadratischen $n \times n$-Matrizen bilden mit Addition und Multiplikation einen Ring mit Einselement E, der für $n \geq 2$ weder kommutativ noch nullteilerfrei ist: Schon $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0$ zeigt, dass ein Produkt verschwinden kann, obwohl kein Faktor die Nullmatrix ist.

Hinweis: Checkliste für die Klausur

Prüfen Sie vor jeder Multiplikation die Formate ($m \times n$ mal $n \times k$ ergibt $m \times k$). Kontrollieren Sie eine berechnete Inverse immer durch eine Probe, mindestens für eine Zeile. Bestimmen Sie Kern und Bild mit demselben Gauß-Schema: Der Kern ergibt

sich aus den freien Variablen, eine Basis des Bildes bilden die Spalten der ursprünglichen Matrix, in denen nach der Elimination die Pivotelemente stehen. Zum Schluss kontrollieren Sie mit der Dimensionsformel, ob die Anzahlen zusammenpassen. Bei Abbildungen auf Polynomräumen oder Matrizenräumen arbeiten Sie mit Koordinaten bezüglich einer festen Basis; dann gelten dieselben Verfahren wie im $\mathbb{R}^n$.

Achtung: Typische Fehler mit Matrizen

Das Produkt AB existiert nur, wenn A so viele Spalten hat wie B Zeilen. Aus $AB = 0$ folgt nicht $A = 0$ oder $B = 0$, und aus $AB = AC$ darf man $B = C$ nur folgern, wenn A invertierbar ist. Es gilt $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ und $(AB)^T = B^T A^T$ – die Reihenfolge kehrt sich um. Die Bilder der Basisvektoren gehören in die *Spalten* der Darstellungsmatrix, nicht in die Zeilen.

Wusstest du? Cayley und die Matrizenrechnung

Der Begriff „Matrix“ stammt von James Joseph Sylvester (1850). Arthur Cayley veröffentlichte 1858 die erste systematische Darstellung der Matrizenrechnung mit Produkt und Inverse. Lange galt sie als reine Spielerei der Algebra. Heute steckt sie in jeder Suchmaschine, in jeder Bildkompression und in jedem neuronalen Netz, das im Kern aus riesigen Matrizenprodukten besteht. Der Suchalgorithmus PageRank, mit dem eine bekannte Suchmaschine Ende der neunziger Jahre groß wurde, bewertet Webseiten mit einer Übergangsmatrix, deren Zeilen und Spalten die Seiten des Netzes sind. Und auch die Wettervorhersage des Deutschen Wetterdienstes löst in jedem Rechenschritt riesige lineare Gleichungssysteme mit Matrizen, die Milliarden von Einträgen haben.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- f ist linear, wenn $f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$ gilt; Schnelltest: $f(0) = 0$ ist notwendig, aber nicht hinreichend.
- Darstellungsmatrix: Die Spalten sind die Bilder der Basisvektoren; $f(x) = Ax$.
- Kern $\ker f$ und Bild $\operatorname{im} f$ sind Unterräume; f injektiv $\iff \ker f = \{0\}$.
- Dimensionsformel: $\dim V = \dim \ker f + \operatorname{rang} f$; bei gleicher Dimension gilt injektiv $\iff$ surjektiv $\iff$ bijektiv.
- Verkettung entspricht dem Matrixprodukt: $f \circ g$ hat die Matrix AB; das Produkt ist assoziativ, aber nicht kommutativ.
- Inverse: 2×2-Formel $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, sonst Gauß-Jordan mit $(A \mid E)$; $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- Basiswechsel: In der Basis aus den Spalten von T hat die Abbildung die Matrix $T^{-1}AT$; ähnliche Matrizen haben gleiche Determinante, Spur und gleichen Rang.

Achtung

Häufige Fehler: Spalten und Zeilen bei der Darstellungsmatrix vertauschen, das Produkt in der falschen Reihenfolge bilden ($g \circ f$ hat die Matrix $A_g A_f$), $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ rechnen oder annehmen, dass $AB = 0$ zu $A = 0$ oder $B = 0$ führt.

Ottos Tipp

Prüfen Sie bei Matrizenprodukten zuerst die Formate: $(m \times n) \cdot (n \times p)$ ergibt $(m \times p)$. Nach dem Berechnen von Kern und Bild kontrollieren Sie mit der Dimensionsformel.