Arbeitsblatt - Lineare Abbildungen und Matrizen

Klasse: Studium 1 Semester · 20

Der Rechenweg muss angegeben werden.

Aufgabe 1

Aufgabe 1 – Linear oder nicht?

Entscheiden Sie, ob die Abbildung linear ist. Geben Sie bei linearen Abbildungen die Matrix an, bei nichtlinearen ein konkretes Gegenbeispiel.

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (2x + y,\ x - 3y)$
b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g(x, y) = (x + 1,\ y)$
c) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $h(x, y) = (xy,\ x)$
d) $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $k(x) = (x,\ 2x,\ -x)$

Aufgabe 2

Aufgabe 2 – Darstellungsmatrizen aufstellen

Bestimmen Sie die Matrix bezüglich der Standardbasen. Berechnen Sie dazu die Bilder der Einheitsvektoren und schreiben Sie sie als Spalten.

a) $f(x, y, z) = (x + 2y - z,\ 3x + z)$
b) die Spiegelung der Ebene an der x-Achse
c) die Drehung der Ebene um 90° gegen den Uhrzeigersinn
d) die senkrechte Projektion der Ebene auf die x-Achse

Aufgabe 3

Aufgabe 3 – Matrizen multiplizieren

Gegeben sind $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie AB und BA. Was stellen Sie fest?
b) Berechnen Sie Av.
c) Berechnen Sie A^2.
d) Welche der Produkte vA, $v^T A$, Av^T sind definiert?

Aufgabe 4

Aufgabe 4 – Kern und Bild bestimmen

Bestimmen Sie jeweils eine Basis von Kern und Bild sowie den Rang, und kontrollieren Sie mit der Dimensionsformel.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

b)

c) Ist die Abbildung $x \mapsto Bx$ injektiv, surjektiv oder keins von beiden?

Aufgabe 5

Aufgabe 5 – Inverse von 2×2-Matrizen

Berechnen Sie die Inverse mit der Formel $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, sofern sie existiert, und machen Sie die Probe.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Aufgabe 6

Aufgabe 6 – Gauß-Jordan-Verfahren

Bestimmen Sie die Inverse mit dem Gauß-Jordan-Verfahren $(A \mid E) \to (E \mid A^{-1})$. Notieren Sie alle Zeilenumformungen.

a)

b)

c) Welche Inverse hat B^T? Begründen Sie ohne Rechnung.

Aufgabe 7

Aufgabe 7 – Schrift kursiv stellen

Ein Textprogramm erzeugt Kursivschrift, indem es jeden Buchstaben mit der Scherung $S = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ verzerrt. Ein Buchstabe „I“ wird vereinfacht als Einheitsquadrat mit den Ecken $(0|0)$, $(1|0)$, $(1|1)$, $(0|1)$ beschrieben.

a) Berechnen Sie die Bilder der vier Ecken.

b) Zeigen Sie, dass sich die Fläche nicht ändert.
c) Welche Matrix macht die Kursivstellung rückgängig?
d) Was passiert mit Punkten auf der x-Achse? Deuten Sie das geometrisch.

Aufgabe 8

Aufgabe 8 – Der Roboterarm

Ein Industrieroboter dreht seinen Greifer in der Ebene um das Gelenk im Ursprung. Die Drehung um α hat die Matrix $R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. Der Greifer befindet sich zunächst bei $P(2|0)$ (Einheit: dm).

a) Wo befindet sich der Greifer nach einer Drehung um 30°?
b) Zeigen Sie durch Matrizenmultiplikation, dass $R_{30^\circ} R_{60^\circ} = R_{90^\circ}$ gilt.
c) Ein Werkstück liegt bei $Q(4|2)$. Wohin wird es durch die Drehung um 30° bewegt? Runden Sie auf zwei Dezimalen.
d) Begründen Sie, dass Drehmatrizen beim Hintereinanderausführen vertauschbar sind, obwohl Matrizen im Allgemeinen nicht kommutieren.

Aufgabe 9

Aufgabe 9 – Wanderung zwischen Stadt und Land

In einer Region leben $600\,000$ Menschen in der Stadt (S) und $400\,000$ auf dem Land (L). Jedes Jahr ziehen $10\,\%$ der Stadtbewohner aufs Land und $20\,\%$ der Landbewohner in die Stadt; alle anderen bleiben. Die Gesamtzahl bleibt konstant. Rechnen Sie in Tausend.

a) Stellen Sie die Übergangsmatrix M mit $x_{n+1} = M x_n$ auf, $x_n = (S_n, L_n)^T$.
b) Berechnen Sie x_1 und x_2.
c) Bestimmen Sie die Verteilung, die sich von Jahr zu Jahr nicht ändert ($Mx = x$).
d) Warum ist jede Spaltensumme von M gleich 1?

Aufgabe 10

Aufgabe 10 – Zweistufige Produktion

Ein Betrieb stellt aus den Rohstoffen R_1, R_2 die Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und daraus die Endprodukte E_1, E_2 her. Die Tabellen geben den Bedarf je Stück an.

	Z_1	Z_2
R_1	2	1
R_2	3	4

	E_1	E_2
Z_1	1	2
Z_2	3	1

a) Schreiben Sie die Bedarfsmatrizen A (Rohstoffe je Zwischenprodukt) und B (Zwischenprodukte je Endprodukt) auf.

b) Berechnen Sie die Gesamtbedarfsmatrix $C = AB$ und deuten Sie den Eintrag c_{12}.
c) Ein Auftrag umfasst 10 Stück E_1 und 20 Stück E_2. Wie viele Zwischenprodukte und Rohstoffe werden benötigt?
d) Überprüfen Sie den Rohstoffbedarf auf zweitem Weg.

Aufgabe 11

Aufgabe 11 – Schrägbild am Bildschirm

Ein Programm zeichnet räumliche Körper auf den Bildschirm, indem es jeden Punkt (x, y, z) auf $(x - \frac{z}{2},\ y - \frac{z}{2})$ abbildet.

a) Geben Sie die 2×3-Matrix P dieser Abbildung an.
b) Berechnen Sie die Bilder der Würfelecken $(1, 1, 1)$ und $(2, 0, 2)$.
c) Bestimmen Sie den Kern von P und deuten Sie ihn.
d) Wenden Sie die Dimensionsformel an.

Aufgabe 12

Aufgabe 12 – Geheimschrift mit Matrizen

Bei der Hill-Verschlüsselung ersetzt man Buchstaben durch Zahlen ($A = 0$, $B = 1$, …, $Z = 25$), fasst je zwei zu einem Vektor zusammen und multipliziert mit dem Schlüssel $K = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Alle Ergebnisse werden modulo 26 genommen.

a) Verschlüsseln Sie das Wort „HI“ ($H = 7$, $I = 8$).
b) Verschlüsseln Sie „EA“ ($E = 4$, $A = 0$).
c) Begründen Sie, dass K modulo 26 invertierbar ist, indem Sie $\det K \bmod 26$ berechnen.
d) Zeigen Sie, dass $K^{-1} \equiv \begin{pmatrix} 15 & 17 \\ 20 & 9 \end{pmatrix} \pmod{26}$ gilt, und entschlüsseln Sie Ihr Ergebnis aus a).

Aufgabe 13

Aufgabe 13 – Spiegel im Kaleidoskop

In einem Kaleidoskop stehen zwei Spiegel im Winkel von 30°. In der Ebene ist die Spiegelung an der Geraden durch den Ursprung mit dem Winkel α zur x-Achse gegeben durch $S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$.

a) Geben Sie S_0 und S_{30° mit exakten Werten an.
b) Berechnen Sie $S_{30^\circ} S_0$ und zeigen Sie, dass das Ergebnis eine Drehung ist. Um welchen Winkel?
c) Berechnen Sie $\det S_\alpha$ und S_α^2. Deuten Sie die Ergebnisse.
d) Wie viele Bilder eines Gegenstands sieht man ungefähr, wenn die Drehung um 60° wiederholt wird, bis man wieder am Anfang ist?

Aufgabe 14

Aufgabe 14 – Ableiten als Matrix

Auf dem Raum P_3 der Polynome vom Grad höchstens 3 mit der Basis $1, x, x^2, x^3$ betrachten wir die Ableitung $D(p) = p'$.

a) Zeigen Sie, dass D linear ist.
b) Stellen Sie die 4×4-Matrix von D auf.
c) Berechnen Sie mit der Matrix die Ableitung von $p = 2 - x + 3x^2 + x^3$ und die zweite Ableitung.
d) Bestimmen Sie Kern und Bild von D und zeigen Sie $D^4 = 0$.

Aufgabe 15

Aufgabe 15 – Potenzen durch Basiswechsel

Die Abbildung $f(x) = Ax$ mit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ soll mehrfach hintereinander ausgeführt werden. Statt A^5 direkt zu berechnen, sucht man eine bessere Basis. Gegeben sind $b_1 = (1, 0)^T$ und $b_2 = (1, -1)^T$.

a) Berechnen Sie Ab_1 und Ab_2 und drücken Sie die Ergebnisse durch b_1 bzw. b_2 aus.
b) Stellen Sie $T = (b_1\, b_2)$ auf, berechnen Sie T^{-1} und $T^{-1}AT$.
c) Berechnen Sie $A^5 = T\,(T^{-1}AT)^5\,T^{-1}$.
d) Kontrollieren Sie den Eintrag oben rechts mit der Formel $3^5 - 2^5$ und erklären Sie, warum diese Formel gilt.

Aufgabe 16

Aufgabe 16 – Eine Vogelpopulation

Eine Vogelart wird in drei Altersklassen erfasst: Jungvögel (J), einjährige (E) und ältere Vögel (A). Jungvögel bekommen keinen Nachwuchs, einjährige im Mittel 4 und ältere 3 überlebende Junge pro Jahr. Von den Jungvögeln überleben $50\,\%$, von den einjährigen $25\,\%$ bis ins nächste Jahr; ältere Vögel werden höchstens zwei Jahre alt. Zu Beginn zählt man 40 Jungvögel, 20 einjährige und 8 ältere Vögel.

Klasse	Nachwuchs je Tier	Überlebensrate
J	0	0,5
E	4	0,25
A	3	0

a) Stellen Sie die Leslie-Matrix L mit $x_{n+1} = Lx_n$ auf.
b) Berechnen Sie die Bestände nach einem und nach zwei Jahren.
c) Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom $-(\lambda^3 - 2\lambda - \frac{3}{8})$ lautet und $\lambda = \frac{3}{2}$ eine Nullstelle ist.
d) Prüfen Sie, dass $v = (18, 6, 1)^T$ die Gleichung $Lv = \frac{3}{2}v$ erfüllt, und deuten Sie das Ergebnis für die Entwicklung der Population.

Aufgabe 17

Aufgabe 17 – Temperaturkurve durch drei Messwerte

Eine Wetterstation misst um 0, 1 und 2 Uhr (in Stunden nach Mitternacht) Temperaturen und sucht eine Parabel $p(t) = a + bt + ct^2$ durch die Messwerte. Die Abbildung $\Phi : P_2 \to \mathbb{R}^3$, $\Phi(p) = (p(0), p(1), p(2))$ ordnet jedem Polynom seine drei Werte zu.

a) Zeigen Sie, dass Φ linear ist, und stellen Sie die Matrix V bezüglich der Basis $1, t, t^2$ auf.
b) Berechnen Sie $\det V$ und folgern Sie, dass Φ bijektiv ist.
c) Bestimmen Sie die Parabel zu den Werten $(1, 3, 7)$.
d) An einem Wintertag misst man 12, 15 und 22 Zehntelgrad. Bestimmen Sie die Parabel und beurteilen Sie, ob sie für eine Vorhersage um 10 Uhr taugt.

Aufgabe 18

Aufgabe 18 – Schatten auf einer Rampe

Die Sonne steht senkrecht über einer geraden Rampe, die in der Ebene in Richtung $u = (1, 2)^T$ durch den Ursprung verläuft. Der Schatten eines Punktes x ist seine senkrechte Projektion auf die Rampe: $P(x) = \frac{u \cdot x}{u \cdot u}\, u$.

a) Zeigen Sie, dass P linear ist, und berechnen Sie die Matrix $P = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.
b) Berechnen Sie die Schatten der Punkte $(3, 1)$ und $(4, 3)$.
c) Bestimmen Sie Kern und Bild von P.
d) Zeigen Sie $P^2 = P$ und erklären Sie geometrisch, warum das so sein muss.
e) Ist P invertierbar? Begründen Sie mit zwei verschiedenen Argumenten.

Aufgabe 19

Aufgabe 19 – Lösbarkeit und Rang

Gegeben ist $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = Ax$ mit .

a) Zeigen Sie ohne Rechnung, dass f nicht injektiv sein kann.
b) Bestimmen Sie den Rang von A und eine Basis des Kerns.
c) Entscheiden Sie mit dem Rangkriterium, ob $Ax = b$ für $b = (1, 1, 2)^T$ bzw. $b = (1, 1, 1)^T$ lösbar ist.
d) Beschreiben Sie das Bild von f durch eine Gleichung $\alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3 = 0$.

Aufgabe 20

Aufgabe 20 – Knobelaufgabe: Endlich gegen unendlich

Für endlichdimensionale Räume gilt: Eine lineare Abbildung $f : V \to V$ ist genau dann

injektiv, wenn sie surjektiv ist. In unendlichdimensionalen Räumen ist das falsch. Untersuchen Sie das genauer.

a) Beweisen Sie die Aussage für $\dim V = n$ mit der Dimensionsformel.
b) Folgern Sie: Sind A, B quadratische Matrizen mit $AB = E$, so gilt auch $BA = E$.
c) Zeigen Sie, dass auf dem Raum $\mathbb{R}[x]$ aller Polynome die Ableitung D surjektiv, aber nicht injektiv ist.
d) Zeigen Sie, dass die Multiplikation $M(p) = x \cdot p$ injektiv, aber nicht surjektiv ist, und berechnen Sie $D \circ M$ und $M \circ D$ für $p = 1$.