Lösungen - Lineare Abbildungen und Matrizen

Klasse: Studium 1 Semester

Lösung zu Aufgabe 1

a) Es ist $f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Jede Abbildung der Form $x \mapsto Ax$ ist linear, denn $A(\lambda u + \mu v) = \lambda Au + \mu Av$.
b) Schnelltest: $g(0,0) = (1,0) \neq (0,0)$. Eine lineare Abbildung bildet den Nullvektor auf den Nullvektor ab, also ist g nicht linear (es ist eine Verschiebung).
c) $h(0,0) = (0,0)$, aber $h(2,2) = (4,2)$ und $2h(1,1) = 2 \cdot (1,1) = (2,2)$. Wegen $h(2 \cdot (1,1)) \neq 2h(1,1)$ ist h nicht linear.

d)  ist linear mit der 3×1-Matrix  .

Lösung zu Aufgabe 2

a) $f(e_1) = (1,3)$, $f(e_2) = (2,0)$, $f(e_3) = (-1,1)$. Also $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, eine 2×3-Matrix.
b) $e_1 \mapsto e_1$, $e_2 \mapsto -e_2$. Also $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
c) $e_1 = (1,0) \mapsto (0,1)$, $e_2 = (0,1) \mapsto (-1,0)$. Also $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
d) $e_1 \mapsto e_1$, $e_2 \mapsto 0$. Also $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; der Kern ist die y-Achse.

Erläuterung: Die Darstellungsmatrix entsteht immer nach demselben Rezept: Man berechnet die Bilder der Einheitsvektoren und schreibt sie nebeneinander als Spalten. Die Matrix hat so viele Spalten, wie der Ausgangsraum Dimensionen hat, und so viele Zeilen, wie der Zielraum Dimensionen hat. Zur Kontrolle multipliziert man die Matrix mit einem beliebigen Vektor und vergleicht mit der Abbildungsvorschrift.

Lösung zu Aufgabe 3

a) $AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$,
$BA = \begin{pmatrix} 0+3 & 0+4 \\ 1-3 & 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$. Es gilt $AB \neq BA$: Das Produkt ist nicht kommutativ.
b) $Av = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

c) $A^2 = \begin{pmatrix} 1+6 & 2+8 \\ 3+12 & 6+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$.
d) v ist 2×1, A ist 2×2. vA: $1 \neq 2$, nicht definiert. $v^T A$ (1×2 mal 2×2) ist definiert und ergibt $(-2, -2)$. Av^T (2×2 mal 1×2) ist nicht definiert.

Lösung zu Aufgabe 4

a) Die zweite Zeile ist das Doppelte der ersten, der Rang ist 1. Kern: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$ mit freien $x_2 = s$, $x_3 = t$: Basis $(-2, 1, 0)^T$, $(-3, 0, 1)^T$. Bild: $\operatorname{span}\{(1, 2)^T\}$. Kontrolle: $3 = 2 + 1$.
b) $Z_3 - Z_1 - Z_2$ ergibt eine Nullzeile, der Rang ist 2. Aus $x_1 + x_3 = 0$ und $x_2 + x_3 = 0$ folgt mit $x_3 = t$: Kern $= \operatorname{span}\{(-1, -1, 1)^T\}$. Bild: $\operatorname{span}\{(1, 0, 1)^T, (0, 1, 1)^T\}$ (die ersten beiden Spalten). Kontrolle: $3 = 1 + 2$.
c) Der Kern ist nicht $\{0\}$, also nicht injektiv. Das Bild ist nur zweidimensional, also nicht surjektiv. Bei quadratischen Matrizen fallen beide Eigenschaften immer zusammen.

Lösung zu Aufgabe 5

a) $\det A = 6 - 5 = 1$. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$. Probe: $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 6-5 & -2+2 \\ 15-15 & -5+6 \end{pmatrix} = E$.
b) $\det B = 12 - 12 = 0$: B ist nicht invertierbar. Die Spalten sind linear abhängig ($(4, 6) = 2 \cdot (2, 3)$).
c) $\det C = 4 - 6 = -2$. $C^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Probe: erste Zeile von C mal erste Spalte: $-2 + 3 = 1$; mal zweite Spalte: $1 - 1 = 0$.
Erläuterung: Die Formel funktioniert nur, wenn die Determinante nicht null ist; deshalb berechnet man sie immer zuerst.

Lösung zu Aufgabe 6

a) Der Block $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ hat Determinante 1. Mit $Z_1 \leftrightarrow Z_2$, dann $Z_2 - 2Z_1$, $Z_1 - Z_2$ und

$Z_3 \cdot \frac{1}{3}$ erhält man . Probe: $(2, 1, 0) \cdot (1, -1, 0) = 1$,

$(2, 1, 0) \cdot (-1, 2, 0) = 0$.
b) Von unten nach oben: $Z_2 - Z_3$ liefert $(0, 1, 0 \,|\, 0, 1, -1)$, dann $Z_1 - Z_2 - Z_3$ liefert

$(1, 0, 0 \,|\, 1, -1, 0)$. Also .

c) Es gilt , denn $B^T(B^{-1})^T = (B^{-1}B)^T = E^T = E$.

Lösung zu Aufgabe 7

a) $S(0,0)=(0,0)$, $S(1,0)=(1,0)$, $S(1,1)=(1{,}5;\,1)$, $S(0,1)=(0{,}5;\,1)$. Das Quadrat wird zum Parallelogramm.
b) $\det S = 1\cdot 1 - \frac{1}{2}\cdot 0 = 1$. Flächen werden mit $|\det S| = 1$ multipliziert: Das Parallelogramm hat die Fläche 1 (Grundseite 1, Höhe 1).
c) $S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (Scherung in die Gegenrichtung). Probe:
$SS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$
d) $S(x,0)=(x,0)$: Die Grundlinie bleibt fest. Punkte werden umso stärker nach rechts verschoben, je höher sie liegen – genau das Aussehen von Kursivschrift.

Lösung zu Aufgabe 8

a) $R_{30^\circ}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\cos 30^\circ\\ 2\sin 30^\circ\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}1{,}73\\1\end{pmatrix}$.
b)
$R_{30^\circ}R_{60^\circ} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4}-\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4}+\frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = R_{90^\circ}$
.
c) $\begin{pmatrix} 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\cdot\frac{1}{2} \\ 4\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\sqrt{3}-1\\ 2+\sqrt{3}\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}2{,}46\\3{,}73\end{pmatrix}$.
d) Mit den Additionstheoremen gilt allgemein $R_\alpha R_\beta = R_{\alpha+\beta} = R_{\beta+\alpha} = R_\beta R_\alpha$. Zwei Drehungen um denselben Punkt addieren nur ihre Winkel, die Reihenfolge spielt keine Rolle.
Erläuterung: Die Spalten der Drehmatrix sind die gedrehten Einheitsvektoren. Hintereinander ausgeführte Drehungen um denselben Punkt addieren ihre Winkel, was sich im Matrizenprodukt über die Additionstheoreme zeigt. Für den Roboter bedeutet das: Die Steuerung kann zwei kleine Drehschritte zu einer einzigen Drehung zusammenfassen und spart Rechenzeit.

Lösung zu Aufgabe 9

a) $M = \begin{pmatrix}0{,}9 & 0{,}2\\ 0{,}1 & 0{,}8\end{pmatrix}$: In der ersten Spalte steht, wohin die Stadtbevölkerung geht ($90\,\%$ bleibt, $10\,\%$ aufs Land), in der zweiten die Landbevölkerung.
b) $x_1 = \begin{pmatrix}0{,}9\cdot 600 + 0{,}2\cdot 400\\ 0{,}1\cdot 600 + 0{,}8\cdot 400\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}620\\380\end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix}558+76\\62+304\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}634\\366\end{pmatrix}$.
c) $Mx = x$ bedeutet $0{,}1S = 0{,}2L$, also $S = 2L$. Mit $S+L=1000$: $L = \frac{1000}{3} \approx 333{,}3$, $S \approx 666{,}7$ (Tausend).
d) Jede Person ist im nächsten Jahr entweder in der Stadt oder auf dem Land. Die Anteile einer Spalte beschreiben alle Möglichkeiten für eine Gruppe und ergeben

zusammen $100\,\%$. Deshalb bleibt die Gesamtbevölkerung erhalten.

Lösung zu Aufgabe 10

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.
b) $C = \begin{pmatrix} 2+3 & 4+1 \\ 3+12 & 6+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 15 & 10 \end{pmatrix}$. $c_{12} = 5$: Für ein Stück E_2 braucht man insgesamt 5 Einheiten R_1.
c) Zwischenprodukte: $B \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10+40 \\ 30+20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \end{pmatrix}$. Rohstoffe: $C \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50+100 \\ 150+200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 350 \end{pmatrix}$.
d) $A \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100+50 \\ 150+200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 350 \end{pmatrix}$. Beide Wege stimmen überein – das ist gerade die Assoziativität $A(Bx) = (AB)x$.
Erläuterung: Die Gesamtbedarfsmatrix fasst zwei Produktionsstufen zusammen. Ihre Einträge beantworten direkt die Frage, wie viel Rohstoff ein Endprodukt insgesamt verbraucht, ohne die Zwischenprodukte einzeln zu betrachten.

Lösung zu Aufgabe 11

a) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
b) $P(1,1,1)^T = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$, $P(2,0,2)^T = (2-1,\, 0-1)^T = (1,-1)^T$.
c) $x = \frac{z}{2}$, $y = \frac{z}{2}$: $\ker P = \operatorname{span}\{(1,1,2)^T\}$. Alle Punkte auf dieser Geraden landen im Ursprung – es ist die Blickrichtung der Projektion.
d) $3 = \dim \ker P + \operatorname{rang} P = 1 + 2$. Das Bild ist der ganze Bildschirm $\mathbb{R}^2$.

Lösung zu Aufgabe 12

a) $K \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21+24 \\ 14+40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 54 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 19 \\ 2 \end{pmatrix}$: „TC“.
b) $K \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}$: „MI“.
c) $\det K = 15 - 6 = 9$. Da $\operatorname{ggT}(9, 26) = 1$, gibt es ein Inverses: $9 \cdot 3 = 27 \equiv 1$, also $9^{-1} \equiv 3 \pmod{26}$.
d) $K^{-1} \equiv 3 \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -9 \\ -6 & 9 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 15 & 17 \\ 20 & 9 \end{pmatrix}$. Entschlüsseln: $\begin{pmatrix} 15 \cdot 19 + 17 \cdot 2 \\ 20 \cdot 19 + 9 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 319 \\ 398 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$: „HI“.
Erläuterung: Beim Rechnen modulo 26 ersetzt man jedes Ergebnis durch seinen Rest bei Division durch 26. Eine Matrix ist modulo 26 genau dann invertierbar, wenn ihre Determinante ein Inverses modulo 26 besitzt, also teilerfremd zu 26 ist. Die Inverse berechnet man mit derselben Formel wie bei reellen Matrizen, nur dass man statt

durch die Determinante mit ihrem Inversen modulo 26 multipliziert.

Lösung zu Aufgabe 13

a) $S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $S_{30^\circ} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

b) $S_{30^\circ} S_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = R_{60^\circ}$. Zwei Spiegelungen ergeben eine Drehung um den doppelten Winkel zwischen den Achsen.

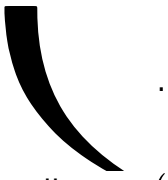
c) $\det S_\alpha = -\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha = -1$: Spiegelungen kehren die Orientierung um.
$S_\alpha^2 = E$: Zweimal spiegeln ergibt die Ausgangslage.

d) $360^\circ : 60^\circ = 6$ Drehungen, dazu kommen die gespiegelten Bilder: insgesamt 12 Bilder (6 gedrehte und 6 gespiegelte), die das bekannte sternförmige Muster ergeben.

Lösung zu Aufgabe 14

a) Nach den Ableitungsregeln gilt $(\lambda p + \mu q)' = \lambda p' + \mu q'$.

b) $D(1) = 0$, $D(x) = 1$, $D(x^2) = 2x$, $D(x^3) = 3x^2$. Die Koordinaten bilden die Spalten:



.

c) Koordinaten $(2, -1, 3, 1)^T$. D liefert $(-1, 6, 3, 0)^T$, also $p' = -1 + 6x + 3x^2$. Nochmals: $(6, 6, 0, 0)^T$, also $p'' = 6 + 6x$.

d) Kern: die konstanten Polynome ($\dim 1$). Bild: P_2 ($\dim 3$); $4 = 1 + 3$. Viermal ableiten macht jedes Polynom vom Grad ≤ 3 zu 0, also $D^4 = 0$.

Lösung zu Aufgabe 15

a) $Ab_1 = (3, 0)^T = 3b_1$, $Ab_2 = (3 - 1,\ -2)^T = (2, -2)^T = 2b_2$.

b) $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\det T = -1$, $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = T$. $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, da die neuen Basisvektoren nur gestreckt werden.

c) Zuerst $T \begin{pmatrix} 243 & 0 \\ 0 & 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 243 & 32 \\ 0 & -32 \end{pmatrix}$, dann mal $T^{-1} = T$:

$$A^5 = \begin{pmatrix} 243 & 32 \\ 0 & -32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 243 & 243 - 32 \\ 0 & 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 243 & 211 \\ 0 & 32 \end{pmatrix}.$$

d) $3^5 - 2^5 = 243 - 32 = 211$. Für $e_2 = b_1 - b_2$ gilt $A^5 e_2 = 3^5 b_1 - 2^5 b_2 = (243 - 32,\ 32)^T$.

Erläuterung: In einer Basis aus Vektoren, die nur gestreckt werden, ist die Matrix diagonal. Potenzen einer Diagonalmatrix berechnet man, indem man die Diagonaleinträge potenziert. Der Umweg über T und T^{-1} ist deshalb viel schneller als fünfmaliges Multiplizieren, besonders bei hohen Potenzen.

Lösung zu Aufgabe 16

a) (erste Zeile: Nachwuchs, darunter: Überleben in die nächste Klasse).
b) $x_1 = (4 \cdot 20 + 3 \cdot 8,\ 0{,}5 \cdot 40,\ 0{,}25 \cdot 20)^T = (104, 20, 5)^T$,
$x_2 = (80 + 15,\ 52,\ 5)^T = (95, 52, 5)^T$.
c) Entwicklung nach der ersten Spalte:
$\det(L - \lambda E) = -\lambda \cdot \lambda^2 - 0{,}5 \cdot (4 \cdot (-\lambda) - 3 \cdot 0{,}25) = -\lambda^3 + 2\lambda + \frac{3}{8}$. Für $\lambda = \frac{3}{2}$:
$\frac{27}{8} - 3 - \frac{3}{8} = 0$.
d) $Lv = (24 + 3,\ 9,\ 1{,}5)^T = (27, 9, 1{,}5)^T = \frac{3}{2}(18, 6, 1)^T$. Langfristig wächst die Population pro Jahr um etwa $50\,\%$, und die Altersklassen stehen im Verhältnis $18 : 6 : 1$.

Lösung zu Aufgabe 17

a) $\Phi(\lambda p + \mu q) = \lambda\Phi(p) + \mu\Phi(q)$, weil Einsetzen mit Summen und Vielfachen verträglich ist. Spalten: $\Phi(1) = (1, 1, 1)$, $\Phi(t) = (0, 1, 2)$, $\Phi(t^2) = (0, 1, 4)$: .

b) $\det V = 1 \cdot (4 - 2) = 2 \neq 0$. Also ist Φ bijektiv: Zu je drei Messwerten gibt es genau eine Parabel.
c) $a = 1$, $a + b + c = 3$, $a + 2b + 4c = 7$. Daraus $b + c = 2$, $2b + 4c = 6$, also $c = 1$, $b = 1$: $p(t) = 1 + t + t^2$.
d) $a = 12$, $b + c = 3$, $2b + 4c = 10$: $c = 2$, $b = 1$. $p(t) = 12 + t + 2t^2$. Für $t = 10$ ergäbe sich 222 Zehntelgrad, also $22{,}2\,^\circ\mathrm{C}$ – im Winter unrealistisch. Interpolation taugt nur zwischen den Messpunkten, nicht für weite Extrapolation.

Lösung zu Aufgabe 18

a) Das Skalarprodukt ist in x linear, also auch P. $P(e_1) = \frac{1}{5}(1, 2)$,
$P(e_2) = \frac{2}{5}(1, 2) = \frac{1}{5}(2, 4)$; das sind die Spalten.
b) $P(3, 1) = \frac{3+2}{5}(1, 2) = (1, 2)$, $P(4, 3) = \frac{4+6}{5}(1, 2) = (2, 4)$.
c) Kern: $x + 2y = 0$, also $\operatorname{span}\{(2, -1)^T\}$ – die Richtung senkrecht zur Rampe. Bild: $\operatorname{span}\{(1, 2)^T\}$, die Rampe selbst.
d) $P^2 = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 1+4 & 2+8 \\ 2+8 & 4+16 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = P$. Ein Schatten liegt schon auf der Rampe; sein eigener Schatten ist er selbst.
e) Nein: $\det P = \frac{1}{25}(4 - 4) = 0$, und der Kern ist nicht $\{0\}$. Anschaulich haben viele Punkte denselben Schatten, man kann den Ausgangspunkt nicht zurückgewinnen.

Lösung zu Aufgabe 19

a) Nach der Dimensionsformel ist $\dim\ker f = 4 - \operatorname{rang} A \geq 4 - 3 = 1$. Der Kern enthält also Vektoren $\neq 0$.

b) Die dritte Zeile ist die Summe der ersten beiden, also $\operatorname{rang} A = 2$ und $\dim \ker A = 2$. Aus $x_2 + x_3 + x_4 = 0$, $x_1 + 2x_2 + x_4 = 0$ mit $x_3 = s$, $x_4 = t$: $x_2 = -s - t$, $x_1 = 2s + t$. Basis: $(2, -1, 1, 0)^T$, $(1, -1, 0, 1)^T$.
c) Für $b = (1, 1, 2)^T$ gilt $b_3 = b_1 + b_2$: Der Rang der erweiterten Matrix bleibt 2, lösbar (etwa $x = (0, 0, 0, 1)^T$). Für $b = (1, 1, 1)^T$ ist $b_3 \neq b_1 + b_2$: Rang 3, unlösbar.
d) Jeder Bildvektor erfüllt $y_3 = y_1 + y_2$, also $y_1 + y_2 - y_3 = 0$. Das ist eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ (Dimension $2 = \operatorname{rang} A$).

Lösung zu Aufgabe 20

a) f injektiv $\iff \ker f = \{0\} \iff \dim \operatorname{im} f = n - 0 = n \iff \operatorname{im} f = V \iff f$ surjektiv. Der vorletzte Schritt nutzt, dass ein Unterraum der Dimension n eines n-dimensionalen Raums der ganze Raum ist. □
b) Aus $ABx = x$ folgt: $Bx = 0 \Rightarrow x = 0$, also ist $x \mapsto Bx$ injektiv und damit bijektiv. Dann ist B invertierbar, und $A = ABB^{-1} = B^{-1}$, also $BA = E$. □
c) Jedes Polynom $q = \sum a_k x^k$ ist Ableitung von $\sum \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$: surjektiv. Aber $D(1) = 0$, der Kern enthält die Konstanten: nicht injektiv.
d) Aus $xp = 0$ folgt $p = 0$: injektiv. Das Polynom 1 ist kein Vielfaches von x: nicht surjektiv. $D(M(1)) = D(x) = 1$, aber $M(D(1)) = M(0) = 0$. Also $D \circ M = \mathrm{id}$ auf 1, aber $M \circ D \neq \mathrm{id}$ – im Unendlichdimensionalen folgt aus „Links-invers“ nicht „Rechts-invers“.