Lösungen zur Klassenarbeit - Komplexe Zahlen

Klasse: Studium 1 Semester · Dauer: 60 Minuten · /20

Lösung zu Aufgabe 1 (5 BE/Punkte)

a) $2 - 6i + i - 3i^2 = 5 - 5i$ (1 P.).
b) $\frac{(3+4i)(1+2i)}{5} = \frac{3+6i+4i-8}{5} = \frac{-5+10i}{5} = -1 + 2i$ (2 P.).
c) $|3 + 4i| = 5$, Konjugierte $3 - 4i$ (2 P.).
In a) multipliziert man aus, ersetzt i^2 durch -1 und fasst Real- und Imaginärteil getrennt zusammen. Bei b) wird mit $1 + 2i$ erweitert, der Konjugierten des Nenners; der neue Nenner $1^2 + 2^2 = 5$ ist reell. Kontrolle für b): $(-1 + 2i)(1 - 2i) = -1 + 2i + 2i + 4 = 3 + 4i$. Der Betrag in c) ist der Abstand vom Ursprung, nach Pythagoras 5.

Lösung zu Aufgabe 2 (4 BE/Punkte)

a) $r = \sqrt{1 + 3} = 2$; zweiter Quadrant: $\varphi = \frac{2\pi}{3}$. $z = 2e^{2\pi i/3}$ (2 P.).
b) $z^6 = 2^6 e^{4\pi i} = 64$ (2 P.).
Für die Polarform berechnet man den Betrag und bestimmt das Argument mit Blick auf den Quadranten: Der Punkt $(-1|\sqrt{3})$ liegt links oben, deshalb ist das Argument 120° und nicht -60°. Nach de Moivre wird der Betrag potenziert und das Argument versechsfacht; $6 \cdot \frac{2\pi}{3} = 4\pi$ ist ein Vielfaches von 2π, also ist z^6 reell und positiv.

Lösung zu Aufgabe 3 (4 BE/Punkte)

a) $z_k = 2e^{2\pi i k/3}$, $k = 0, 1, 2$ (2 P.).
b) 2, $-1 + \sqrt{3}\,i$, $-1 - \sqrt{3}\,i$; gleichseitiges Dreieck auf dem Kreis mit Radius 2 (2 P.).
Man schreibt die rechte Seite in Polarform, $8 = 8e^{0i}$, zieht aus dem Betrag die dritte Wurzel und teilt das Argument plus Vielfache von 2π durch drei. So entstehen genau drei Lösungen, die um je 120° gegeneinander gedreht sind. Probe für $-1 + \sqrt{3}\,i$: Quadrieren ergibt $-2 - 2\sqrt{3}\,i$, nochmals multipliziert 8.

Lösung zu Aufgabe 4 (4 BE/Punkte)

a) $|Z| = \sqrt{1600 + 900} = 50\,\Omega$; $\varphi = \arctan\frac{3}{4} \approx 36{,}9^\circ$ (2 P.).
b) $I = \frac{230}{50} = 4{,}6$ A (1 P.).
c) Positiver Imaginärteil: induktiv (1 P.).
Der Betrag der Impedanz folgt aus Real- und Imaginärteil nach Pythagoras, die Phasenverschiebung aus dem Arcustangens des Verhältnisses. Für den Strom zählt nur der Betrag. Ein positiver Imaginärteil entsteht durch eine Spule, deren Blindwiderstand

ωL positiv ist; der Strom eilt dann der Spannung um etwa 37° nach.

Lösung zu Aufgabe 5 (3 BE/Punkte)

a) $z = 1 \pm \sqrt{1-5} = 1 \pm 2i$ (2 P.).
b) $(1+2i)^2 - 2(1+2i) + 5 = -3 + 4i - 2 - 4i + 5 = 0$ (1 P.).

Die Lösungsformel $z = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ liefert hier die negative Diskriminante -4, deren Wurzeln $\pm 2i$ sind. Da die Koeffizienten reell sind, erscheinen die Lösungen als konjugiertes Paar. Die Probe ist Pflicht: Man setzt $1+2i$ ein, quadriert sorgfältig und prüft, dass Real- und Imaginärteil beide verschwinden. Summe und Produkt der Lösungen sind 2 und 5, wie der Satz von Vieta verlangt.