Lernzettel - Komplexe Zahlen

Klasse: Studium 1 Semester

Einstieg: Eine Gleichung, die „unmöglich“ ist

Im 16. Jahrhundert löste der italienische Mathematiker Cardano kubische Gleichungen und stieß dabei auf Wurzeln aus negativen Zahlen – selbst dort, wo das Endergebnis eine ganz normale reelle Zahl war. Sein Landsmann Bombelli erkannte, dass man mit diesen „unmöglichen“ Zahlen einfach rechnen darf, wenn man sich auf die Regel $i^2 = -1$ einigt. Heute sind komplexe Zahlen aus Technik und Physik nicht wegzudenken: Die Elektrotechnik beschreibt Wechselströme damit, die Signalverarbeitung zerlegt Töne in komplexe Schwingungen, die Quantenmechanik ist ohne sie nicht formulierbar. In der Ebene entspricht die Multiplikation mit einer komplexen Zahl einer Drehstreckung. Wer diese geometrische Sicht versteht, rechnet mit Potenzen und Wurzeln mühelos.

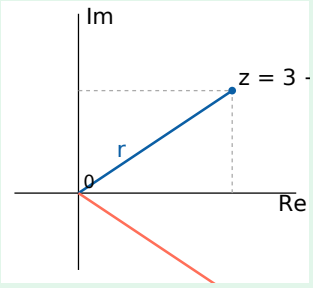
Algebraische Form und Rechnen

Definition: Algebraische Form und Rechnen

Die Gleichung $x^2 = -1$ hat in $\mathbb{R}$ keine Lösung. Man führt deshalb die **imaginäre Einheit** i mit $i^2 = -1$ ein und erhält die **komplexen Zahlen** $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. $a = \operatorname{Re} z$ ist der Realteil, $b = \operatorname{Im} z$ der Imaginärteil. Zwei komplexe Zahlen sind genau dann gleich, wenn Real- und Imaginärteil übereinstimmen. Addition und Multiplikation erfolgen nach den üblichen Regeln mit $i^2 = -1$: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$ und $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$. Die Potenzen von i wiederholen sich mit Periode 4: $i^1 = i,\ i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1$.

Merke

Die **konjugiert komplexe** Zahl zu $z = a + bi$ ist $\bar{z} = a - bi$ (Spiegelung an der reellen Achse). Es gilt $z\bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$ mit dem **Betrag** $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (Abstand zum Ursprung), ferner , , $\operatorname{Re} z = \frac{z+\bar{z}}{2}$ und $|zw| = |z||w|$. Die **Division** erfolgt durch Erweitern mit dem Konjugierten des Nenners: $\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{|w|^2}$.



Polarform und Eulersche Formel

Definition: Polarform und Eulersche Formel

In der **Gaußschen Zahlenebene** entspricht $z = a + bi$ dem Punkt (a, b). Mit dem Betrag $r = |z|$ und dem **Argument** φ (Winkel zur positiven reellen Achse, mit $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$) erhält man die **Polarform** $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$ (Eulersche Formel $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$). Das Argument bestimmt man über $\tan\varphi = \frac{b}{a}$ unter Beachtung des Quadranten; es ist nur bis auf Vielfache von 2π festgelegt. Besonders schön: $e^{i\pi} + 1 = 0$.

Merke

In Polarform ist die Multiplikation einfach: $z_1 z_2 = r_1 r_2\, e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$ und $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$. Daraus folgt die **Formel von de Moivre**: $z^n = r^n e^{in\varphi} = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.

Wurzeln komplexer Zahlen

Definition: Wurzeln komplexer Zahlen

Die Gleichung $w^n = z$ mit $z = re^{i\varphi} \neq 0$ hat genau n Lösungen $w_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i(\varphi+2\pi k)/n}$ für $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Sie liegen auf einem Kreis mit Radius $\sqrt[n]{r}$ und bilden die Ecken eines regelmäßigen n-Ecks. Die n-ten Einheitswurzeln sind $e^{2\pi ik/n}$. Der **Fundamentalsatz der Algebra** besagt, dass jedes Polynom vom Grad $n \geq 1$ über $\mathbb{C}$ genau n Nullstellen (mit Vielfachheit) hat. Quadratische Gleichungen $z^2 + pz + q = 0$ lösen Sie mit der pq-Formel, wobei die Wurzel einer negativen Diskriminante $\sqrt{-D}\,i$ liefert.

So gehst du vor: Rechnen mit komplexen Zahlen

1. Summen und Differenzen in der algebraischen Form $a + bi$ berechnen.
2. Quotienten mit dem Konjugierten des Nenners erweitern.
3. Für Potenzen und Wurzeln in die Polarform $re^{i\varphi}$ wechseln (Quadrant beachten).
4. Bei n-ten Wurzeln alle n Winkel $\frac{\varphi+2\pi k}{n}$ angeben.

Beispiel 1

$\frac{3+4i}{1-2i} = \frac{(3+4i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{3+6i+4i-8}{5} = \frac{-5+10i}{5} = -1+2i.$

Beispiel 2

Polarform von $z = 1 + i$: $r = \sqrt{2}$, $\tan\varphi = 1$ im 1. Quadranten, $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Also $z = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$

. Dann $z^8 = (\sqrt{2})^8 e^{2\pi i} = 16$.

Beispiel 3

Die Gleichung $z^3 = 8i$: $8i = 8e^{i\pi/2}$, also $z_k = 2e^{i(\pi/2+2\pi k)/3}$ mit den Winkeln $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$: $z_0 = \sqrt{3} + i$, $z_1 = -\sqrt{3} + i$, $z_2 = -2i$.

Beispiel 4

$z^2 + 2z + 5 = 0$: $z = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i$. Die Lösungen sind konjugiert komplex, weil die Koeffizienten reell sind.

Rechnen in der Gaußschen Zahlenebene

Jede komplexe Zahl $z = a + bi$ entspricht dem Punkt $(a|b)$ der Gaußschen Zahlenebene. Die Addition geschieht komponentenweise wie bei Vektoren, die Multiplikation mit der Regel $i^2 = -1$. Die **Konjugierte** $\bar{z} = a - bi$ ist die Spiegelung an der reellen Achse. Das Produkt $z\bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$ ist stets reell und nicht negativ; deshalb dividiert man durch w, indem man Zähler und Nenner mit $\bar{w}$ erweitert. Der Betrag $|z|$ ist der Abstand zum Ursprung, und $|z - w|$ ist der Abstand zweier Punkte. Mengen wie $|z - z_0| = r$ sind daher Kreise, $|z - p| = |z - q|$ ist die Mittelsenkrechte von p und q, und $\operatorname{Re} z = c$ beschreibt eine senkrechte Gerade. Die Potenzen von i wiederholen sich mit der Periode 4: $i, -1, -i, 1$.

So gehst du vor: Komplexe Division

1. Nenner $w = c + di$ und seine Konjugierte $\bar{w} = c - di$ notieren.
2. Zähler und Nenner mit $\bar{w}$ erweitern.
3. Nenner ausrechnen: $w\bar{w} = c^2 + d^2$ (reell).
4. Zähler ausmultiplizieren, $i^2 = -1$ ersetzen und in Real- und Imaginärteil sortieren.

Beispiel 5 (Division)

Berechnen Sie $\frac{2+3i}{1-2i}$.

Erweitern mit $1 + 2i$: $\frac{(2+3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{2+4i+3i+6i^2}{1+4} = \frac{-4+7i}{5} = -\frac{4}{5} + \frac{7}{5}i$. Probe: $\left(-\frac{4}{5} + \frac{7}{5}i\right)(1 - 2i) = -\frac{4}{5} + \frac{8}{5}i + \frac{7}{5}i + \frac{14}{5} = 2 + 3i$.

Polarform und die Eulersche Formel

Mit dem Betrag $r = |z|$ und dem Argument φ (dem Winkel zur positiven reellen Achse) schreibt man $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$. Die **Eulersche Formel** $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ verbindet die Exponentialfunktion mit den trigonometrischen Funktionen; für $\varphi = \pi$ liefert

sie die berühmte Identität $e^{i\pi}+1=0$. Beim Umrechnen berechnet man $r=\sqrt{a^2+b^2}$ und bestimmt φ aus $\tan\varphi=\frac{b}{a}$ *unter Beachtung des Quadranten*: Der Taschenrechner liefert $\arctan$ nur im Bereich $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, für a muss man π addieren oder subtrahieren. Das Argument ist nur bis auf Vielfache von 2π eindeutig; üblich ist der Hauptwert in $(-\pi,\pi]$. In Polarform ist die Multiplikation besonders einfach: Beträge multiplizieren, Argumente addieren; bei der Division Beträge dividieren, Argumente subtrahieren.

Beispiel 6 (Umrechnung mit Quadrant)

Schreiben Sie $z=-1+i$ und $w=1-\sqrt{3}\,i$ in Polarform.

Für z ist $r=\sqrt{2}$. Der Punkt liegt im zweiten Quadranten, $\arctan\frac{1}{-1}=-\frac{\pi}{4}$ ist deshalb um π zu korrigieren: $\varphi=\frac{3\pi}{4}$. Also $z=\sqrt{2}\,e^{3\pi i/4}$. Für w ist $r=\sqrt{1+3}=2$, der Punkt liegt im vierten Quadranten, $\varphi=\arctan(-\sqrt{3})=-\frac{\pi}{3}$. Also $w=2e^{-i\pi/3}$.

Potenzen und Wurzeln

Aus der Rechenregel für Polarformen folgt die **Formel von de Moivre**: $(re^{i\varphi})^n=r^n e^{in\varphi}$. Damit lassen sich hohe Potenzen sofort berechnen, ohne $(a+bi)^n$ auszumultiplizieren. Umgekehrt hat die Gleichung $z^n=w$ mit $w=\rho e^{i\theta}\neq 0$ genau n Lösungen $z_k=\sqrt[n]{\rho}\,e^{i(\theta+2\pi k)/n}$ für $k=0,\dots,n-1$. Sie liegen auf einem Kreis mit Radius $\sqrt[n]{\rho}$ und bilden die Ecken eines regelmäßigen n-Ecks. Besonders wichtig sind die **Einheitswurzeln** $\omega_k=e^{2\pi ik/n}$ mit $\omega^n=1$. Ihre Summe ist 0 für $n\geq 2$ (geometrische Summe), und sie liefern in der Fouriertransformation die Basis zur Zerlegung von Signalen.

Beispiel 7 (Dritte Wurzel)

Lösen Sie $z^3=-8$.

Es ist $-8=8e^{i\pi}$. Die drei Lösungen sind $z_k=2e^{i(\pi+2\pi k)/3}$: $z_0=2e^{i\pi/3}=1+\sqrt{3}\,i$, $z_1=2e^{i\pi}=-2$ und $z_2=2e^{i5\pi/3}=1-\sqrt{3}\,i$. Probe: $(-2)^3=-8$. Die drei Punkte bilden ein gleichseitiges Dreieck auf dem Kreis mit Radius 2.

Quadratische Gleichungen und der Fundamentalsatz der Algebra

Über den komplexen Zahlen hat jede quadratische Gleichung $z^2+pz+q=0$ zwei Lösungen $z=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$, wobei die Wurzel aus einer negativen Zahl als $\pm i\sqrt{|\cdot|}$ zu lesen ist. Allgemeiner besagt der **Fundamentalsatz der Algebra**: Jedes Polynom vom Grad $n\geq 1$ mit komplexen Koeffizienten zerfällt über $\mathbb{C}$ in n Linearfaktoren, besitzt also (mit Vielfachheit gezählt) genau n Nullstellen. Für Polynome mit *reellen* Koeffizienten treten nichtreelle Nullstellen paarweise konjugiert auf: Ist z_0 Nullstelle, dann auch $\bar{z}_0$. Deshalb zerfällt jedes reelle Polynom in lineare und quadratische reelle Faktoren, was bei der Partialbruchzerlegung gebraucht wird.

Beispiel 8 (Polynom faktorisieren)

Zerlegen Sie z^4+4 über $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$.

Mit einer quadratischen Ergänzung gilt $z^4+4=(z^2+2)^2-4z^2=(z^2-2z+2)(z^2+2z+2)$. Die Faktoren haben die Nullstellen $1\pm i$ und $-1\pm i$. Über $\mathbb{C}$ ist $z^4+4=(z-1-i)(z-1+i)(z+1-i)(z+1+i)$.

Achtung: Typische Fehler bei komplexen Zahlen

Die Regel $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$ gilt für negative Zahlen nicht: $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=-1$, aber $\sqrt{(-1)(-1)}=1$. Schreiben Sie daher stets i statt $\sqrt{-1}$. Beim Argument wird der Quadrant vergessen: Für $z=-1-i$ ist $\varphi=-\frac{3\pi}{4}$, nicht $\frac{\pi}{4}$. Beim Wurzelziehen werden oft nur die erste Lösung angegeben; die n-te Wurzel hat n Lösungen. Komplexe Zahlen lassen sich nicht anordnen: Aussagen wie z sind sinnlos, nur Beträge sind vergleichbar.

Wusstest du? Cardano, Euler und Gauß

Gerolamo Cardano veröffentlichte 1545 die Lösung der kubischen Gleichung und rechnete erstmals mit Wurzeln aus negativen Zahlen. Rafael Bombelli stellte 1572 die Rechenregeln auf. Leonhard Euler führte 1777 das Symbol i ein, und Carl Friedrich Gauß bewies 1799 den Fundamentalsatz der Algebra und machte die Zahlenebene populär. In der Elektrotechnik schreibt man j statt i, weil i bereits für die Stromstärke vergeben ist.

Hinweis: Komplexe Zahlen in der Elektrotechnik

Bei Wechselstrom beschreibt man Spannung und Strom durch komplexe Zeiger. Ein ohmscher Widerstand R hat die Impedanz R, eine Spule die Impedanz $i\omega L$, ein Kondensator $\frac{1}{i\omega C}=-\frac{i}{\omega C}$. Die Reihenschaltung addiert Impedanzen, die Parallelschaltung addiert Kehrwerte. Der Betrag der Gesamtimpedanz liefert den Effektivwert des Stroms, ihr Argument die Phasenverschiebung. Diese Rechnungen sind genau die Division und Polarform dieses Kapitels.

Geometrie mit komplexen Zahlen

Viele geometrische Abbildungen der Ebene werden mit komplexen Zahlen zu einfachen Rechenoperationen. Die Addition einer festen Zahl b ist eine **Verschiebung** um den Vektor b. Die Multiplikation mit $e^{i\alpha}$ ist eine **Drehung** um den Ursprung um den Winkel α, die Multiplikation mit einer positiven reellen Zahl r eine **Streckung**. Eine allgemeine Multiplikation mit $a=re^{i\alpha}$ ist deshalb eine Drehstreckung. Die Konjugation $z\mapsto\overline{z}$ spiegelt an der reellen Achse. Will man um einen anderen Punkt z_0 drehen, verschiebt man zuerst z_0 in den Ursprung, dreht und verschiebt zurück: $z\mapsto z_0+e^{i\alpha}(z-z_0)$.

Satz: Kreise und Geraden in Betragsschreibweise

Die Menge $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$ ist der Kreis um z_0 mit Radius r; $|z - z_0|$ beschreibt die offene Kreisscheibe. Die Menge $\{z : |z - p| = |z - q|\}$ ist die Mittelsenkrechte der Strecke von p nach q. Der Abstand zweier Punkte ist $|z - w|$.

Beispiel 9 (Quadrat konstruieren)

Zwei benachbarte Ecken eines Quadrats sind $A = 1 + i$ und $B = 4 + 2i$. Bestimmen Sie die beiden anderen Ecken, wenn das Quadrat links von AB liegt.

Der Vektor $B - A = 3 + i$ wird um 90° gedreht, also mit i multipliziert: $i(3 + i) = -1 + 3i$. Damit ist $C = B + (-1 + 3i) = 3 + 5i$ und $D = A + (-1 + 3i) = 4i$. Kontrolle: $|B - A| = |C - B| = \sqrt{10}$, und die Seiten stehen senkrecht aufeinander.

Diese Sichtweise erklärt auch, warum die Lösungen von $z^n = 1$ ein regelmäßiges Vieleck bilden: Jede Lösung entsteht aus der vorigen durch eine Drehung um $\frac{2\pi}{n}$. In der Physik und Technik nutzt man genau diese Eigenschaft, um Schwingungen als rotierende Zeiger darzustellen.

So gehst du vor: Drehung um einen beliebigen Punkt

1. Drehzentrum z_0 und Drehwinkel α festlegen.
2. Den Punkt verschieben: $w = z - z_0$.
3. Mit $e^{i\alpha}$ multiplizieren; für 90° genügt die Multiplikation mit i, für 180° mit -1.
4. Zurückverschieben: Bildpunkt $z' = z_0 + e^{i\alpha} w$.
5. Zur Kontrolle prüfen, dass der Abstand zum Drehzentrum erhalten bleibt: $|z' - z_0| = |z - z_0|$.

Mit dieser Methode lassen sich in der Klausur viele Aufgaben aus der Elementargeometrie ohne Koordinatenrechnung und ohne Trigonometrie lösen: gleichseitige Dreiecke, Quadrate, regelmäßige Sechsecke und Spiegelungen an Geraden durch den Ursprung.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Komplexe Zahlen $z = a + bi$ mit $i^2 = -1$: Addition komponentenweise, Multiplikation mit $i^2 = -1$; Konjugierte $\bar{z} = a - bi$, Betrag $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $z\bar{z} = |z|^2$.
- Division durch Erweitern mit der Konjugierten des Nenners; $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.
- Polarform $z = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$; beim Argument den Quadranten beachten; Multiplikation: Beträge multiplizieren, Argumente addieren.
- Formel von de Moivre: $(re^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}$; Potenzen komplexer Zahlen sind Drehstreckungen.
- Die Gleichung $z^n = w$ hat genau n Lösungen $\sqrt[n]{\rho}\, e^{i(\theta + 2\pi k)/n}$, $k = 0, \ldots, n-1$, auf

einem regelmäßigen n-Eck; die Einheitswurzeln summieren sich zu 0.
- Fundamentalsatz der Algebra: Jedes Polynom vom Grad n hat über $\mathbb{C}$ genau n Nullstellen; bei reellen Koeffizienten treten nichtreelle Nullstellen als konjugierte Paare auf.
- Geometrie: $|z - z_0| = r$ ist ein Kreis, $|z - p| = |z - q|$ die Mittelsenkrechte; komplexe Zahlen sind nicht anordenbar.

Achtung

Ein häufiger Fehler: $\sqrt{-4} \cdot \sqrt{-9} = \sqrt{36} = 6$ rechnen. Richtig ist $2i \cdot 3i = -6$; die Wurzelregel $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ gilt nur für $a, b \geq 0$. Ebenso muss beim Argument der Quadrant beachtet werden (für $z = -1 - i$ ist $\varphi = \frac{5\pi}{4}$, nicht $\frac{\pi}{4}$). Beim Wurzelziehen werden oft nicht alle n Lösungen angegeben.

Ottos Tipp

Skizzieren Sie z in der Zahlenebene, bevor Sie das Argument berechnen. Für Potenzen und Wurzeln nehmen Sie die Polarform, für Summen die algebraische Form.