Arbeitsblatt - Komplexe Zahlen

Klasse: Studium 1 Semester · 20

Der Rechenweg muss angegeben werden.

Aufgabe 1

Aufgabe 1 – Grundrechenarten

Berechnen Sie und geben Sie das Ergebnis in der Form $a+bi$ an.

a) $(3+2i)+(1-4i)$ und $(3+2i)-(1-4i)$
b) $(2+i)(3-2i)$
c) i^{23} und i^{102}
d) $(1+i)^2$ und $(1-i)^2$

Aufgabe 2

Aufgabe 2 – Betrag und Konjugierte

Gegeben ist $z=3-4i$.

a) Bestimmen Sie $\bar{z}$, $|z|$ und $z\bar{z}$.
b) Bestimmen Sie $\frac{1}{z}$ in der Form $a+bi$.
c) Bestimmen Sie $\operatorname{Re}(z^2)$ und $\operatorname{Im}(z^2)$.
d) Zeigen Sie $z+\bar{z}=2\operatorname{Re} z$ und $z-\bar{z}=2i\operatorname{Im} z$ für dieses z.

Aufgabe 3

Aufgabe 3 – Division

Berechnen Sie durch Erweitern mit der Konjugierten des Nenners.

a) $\dfrac{2+3i}{1-2i}$
b) $\dfrac{5}{1+2i}$
c) $\dfrac{1+i}{1-i}$
d) $\dfrac{3-i}{1+i}$

Aufgabe 4

Aufgabe 4 – Gleichungen lösen

Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen und machen Sie die Probe.

a) $z^2=-9$

b) $z^2 + 2z + 5 = 0$
c) $(1+i)z = 3 - i$
d) $z^2 - 4z + 13 = 0$

Aufgabe 5

Aufgabe 5 – Mengen in der Zahlenebene

Beschreiben Sie die Menge aller $z \in \mathbb{C}$, die die Bedingung erfüllen, geometrisch.

a) $|z - (1+i)| = 2$
b) $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$
c) $|z - 1| = |z + 1|$
d) $|z| \leq 1$ und $\operatorname{Re} z \geq 0$

Aufgabe 6

Aufgabe 6 – Von kartesisch nach polar

Bestimmen Sie Betrag und Hauptwert des Arguments (im Bogenmaß) und schreiben Sie $z = re^{i\varphi}$. Beachten Sie den Quadranten.

a) $z = 1 + i$
b) $z = -2$
c) $z = -1 - i$
d) $z = \sqrt{3} - i$

Aufgabe 7

Aufgabe 7 – Von polar nach kartesisch

Geben Sie die Zahlen in der Form $a + bi$ an.

a) $4\left(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ\right)$
b) $2e^{i\pi}$
c) $3e^{-i\pi/2}$
d) $\sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$

Aufgabe 8

Aufgabe 8 – Potenzen mit de Moivre

Berechnen Sie mit der Polarform und geben Sie das Ergebnis in der Form $a + bi$ an.

a) $(1+i)^8$
b) $(\sqrt{3} + i)^6$
c) $(1-i)^{10}$

Aufgabe 9

Aufgabe 9 – Wurzeln ziehen

Bestimmen Sie alle Lösungen und skizzieren Sie ihre Lage.

a) $z^3 = -8$
b) $z^4 = 16$
c) $z^2 = 3 + 4i$ (Tipp: Probieren Sie $2 + i$)

Aufgabe 10

Aufgabe 10 – Quadratische Gleichungen mit komplexen Koeffizienten

Lösen Sie mit der Lösungsformel und prüfen Sie durch Einsetzen.

a) $z^2 - 2iz + 3 = 0$
b) $z^2 + 4 = 0$
c) $z^2 - (3 + i)z + (2 + i) = 0$

Aufgabe 11

Aufgabe 11 – Impedanz im Wechselstromkreis

Eine Reihenschaltung aus einem Widerstand $R = 30\,\Omega$, einer Spule $L = 0{,}2$ H und einem Kondensator $C = 250\,\mu$F liegt an der Spannung $U = 230$ V bei $\omega = 100\,\mathrm{s}^{-1}$. Die komplexe Impedanz ist $Z = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$.

a) Berechnen Sie ωL und $\frac{1}{\omega C}$.
b) Geben Sie Z in der Form $a + bi$ an.
c) Berechnen Sie den Betrag $|Z|$ und die Phasenverschiebung $\varphi = \arg Z$.
d) Berechnen Sie den Effektivwert des Stroms $I = \frac{U}{|Z|}$.

Aufgabe 12

Aufgabe 12 – Reihen- und Parallelschaltung

Zwei Bauteile haben die Impedanzen $Z_1 = 3 + 4i$ und $Z_2 = 1 - 2i$ (in Ohm).

a) Berechnen Sie die Gesamtimpedanz der Reihenschaltung $Z_1 + Z_2$.
b) Berechnen Sie die Gesamtimpedanz der Parallelschaltung $Z_p = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$.
c) Zeigen Sie, dass $\frac{1}{Z_p} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$ gilt.
d) Welche der beiden Schaltungen hat den größeren Betrag der Impedanz?

Aufgabe 13

Aufgabe 13 – Sprite drehen im Computerspiel

In einem Computerspiel liegt der Mittelpunkt einer Figur im Punkt $P = 3 + i$ (Bildschirmkoordinaten, Ursprung im Drehzentrum). Die Figur wird durch Multiplikation

mit $e^{i\alpha}$ um den Ursprung gedreht.

a) Wohin wird P bei einer Drehung um 90° abgebildet?
b) Wohin bei 60°? Geben Sie $a+bi$ exakt und numerisch an.
c) Zeigen Sie, dass der Abstand zum Ursprung bei jeder Drehung gleich bleibt.
d) Welche Multiplikation dreht die Figur um 45° und streckt sie zugleich um den Faktor $\sqrt{2}$?

Aufgabe 14

Aufgabe 14 – Muster aus Drehstreckungen

Ein Fliesenleger entwirft ein Muster. Das Quadrat Q hat die Eckpunkte 0, 1, $1+i$, i. Jede Ecke wird mit $w = 1+i$ multipliziert, die neue Figur ist Q'.

a) Berechnen Sie die vier Ecken von Q'.
b) Um welchen Winkel ist Q' gedreht, um welchen Faktor gestreckt?
c) Wie groß ist die Fläche von Q'?
d) Wiederholt man die Abbildung dreimal: Welche Ecke geht aus 1 hervor?

Aufgabe 15

Aufgabe 15 – Das Zifferblatt

Auf einem Zifferblatt mit Radius 1 entspricht die Stundenmarke k (für $k = 0, \dots, 11$; $k=0$ ist die 12-Uhr-Marke) der komplexen Zahl $m_k = i\,e^{-i\pi k/6}$.

a) Bestätigen Sie, dass $m_0 = i$ (oben) und $m_3 = 1$ (rechts, 3 Uhr) gilt.
b) Berechnen Sie die Marke m_2 (2 Uhr) in der Form $a+bi$.
c) Zeigen Sie, dass alle m_k auf dem Einheitskreis liegen und $m_k^{12} = 1$ gilt.
d) Wie groß ist die Summe aller zwölf Marken? Begründen Sie.

Aufgabe 16

Aufgabe 16 – Nullstellen und Faktorisierung

Bestimmen Sie alle komplexen Nullstellen und zerlegen Sie das Polynom über $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ in Faktoren.

a) $p(z) = z^3 - z^2 + z - 1$
b) $p(z) = z^4 + 4$
c) $p(z) = z^3 - 1$

Aufgabe 17

Aufgabe 17 – Iteration wie bei Mandelbrot

Für eine komplexe Zahl c bildet man $z_0 = 0$, $z_{n+1} = z_n^2 + c$. Bleibt die Folge beschränkt, gehört c zur Mandelbrot-Menge; wird irgendwann $|z_n| > 2$, so divergiert sie.

a) Berechnen Sie die ersten Glieder für $c = 1$.

b) Berechnen Sie die ersten fünf Glieder für $c = i$.
c) Berechnen Sie z_1, z_2, z_3 für $c = 1 + i$ und bestimmen Sie die Beträge.
d) Welche der drei Zahlen gehören zur Mandelbrot-Menge?

Aufgabe 18

Aufgabe 18 – Beweise mit komplexen Zahlen

Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Beweisen Sie.

a) .
b) $|zw| = |z||w|$.
c) $|z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z\bar{w})$ und folgern Sie die Dreiecksungleichung $|z+w| \le |z| + |w|$.
d) Für $z \neq 0$ gilt: $z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn $z \in \mathbb{R}$ oder $|z| = 1$.

Aufgabe 19

Aufgabe 19 – Trigonometrie mit de Moivre

Mit $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi$ lassen sich Additionstheoreme herleiten.

a) Multiplizieren Sie die linke Seite mit dem binomischen Satz aus.
b) Vergleichen Sie die Realteile und zeigen Sie $\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$.
c) Vergleichen Sie die Imaginärteile und zeigen Sie $\sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi$.
d) Prüfen Sie beide Formeln für $\varphi = 60^\circ$.

Aufgabe 20

Aufgabe 20 – Einheitswurzeln und Vieta

Sei $\omega = e^{2\pi i/n}$. Die n-ten Einheitswurzeln sind $1, \omega, \ldots, \omega^{n-1}$.

a) Zeigen Sie $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0$ für $n \ge 2$ mit der geometrischen Summenformel.
b) Prüfen Sie die Aussage für $n = 4$ (die Wurzeln $1, i, -1, -i$).
c) Berechnen Sie das Produkt aller Einheitswurzeln für $n = 3$ und $n = 4$.
d) Erklären Sie mit dem Satz von Vieta für $z^n - 1$, warum das Produkt $(-1)^{n-1}$ ist.