Lösungen - Komplexe Zahlen

Klasse: Studium 1 Semester

Lösung zu Aufgabe 1

a) Summe: $4-2i$. Differenz: $2+6i$.
b) $6-4i+3i-2i^2 = 6-i+2 = 8-i$.
c) $23 = 4\cdot 5+3$, also $i^{23} = i^3 = -i$. $102 = 4\cdot 25+2$, also $i^{102} = i^2 = -1$.
d) $(1+i)^2 = 1+2i-1 = 2i$; $(1-i)^2 = 1-2i-1 = -2i$.
Erläuterung: Man rechnet mit komplexen Zahlen wie mit Termen in i und ersetzt am Ende i^2 durch -1. Real- und Imaginärteil werden getrennt zusammengefasst. Für Potenzen von i nutzt man, dass sich die Werte $i, -1, -i, 1$ mit der Periode 4 wiederholen; es genügt daher der Rest des Exponenten bei Division durch 4.

Lösung zu Aufgabe 2

a) $\bar{z} = 3+4i$, $|z| = \sqrt{9+16} = 5$, $z\bar{z} = 9+16 = 25 = |z|^2$.
b) $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{3+4i}{25} = \frac{3}{25}+\frac{4}{25}i$.
c) $z^2 = 9-24i+16i^2 = -7-24i$. Realteil -7, Imaginärteil -24; Kontrolle $|z^2| = \sqrt{49+576} = 25$.
d) $z+\bar{z} = 6 = 2\cdot 3$ und $z-\bar{z} = -8i = 2i\cdot(-4)$.
Erläuterung: Konjugieren spiegelt an der reellen Achse; der Betrag ist der Abstand vom Ursprung. Das Produkt $z\bar{z}$ ist stets reell und gleich $|z|^2$. Daraus ergibt sich die bequeme Formel $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$, die man bei jeder Division benutzen kann.

Lösung zu Aufgabe 3

a) $\frac{(2+3i)(1+2i)}{5} = \frac{-4+7i}{5} = -\frac{4}{5}+\frac{7}{5}i$.
b) $\frac{5(1-2i)}{5} = 1-2i$.
c) $\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i$.
d) $\frac{(3-i)(1-i)}{2} = \frac{3-3i-i+i^2}{2} = \frac{2-4i}{2} = 1-2i$.
Erläuterung: Erweitert man mit der Konjugierten des Nenners, wird der Nenner reell, denn $(c+di)(c-di) = c^2+d^2$. Danach multipliziert man den Zähler aus, ersetzt $i^2 = -1$ und teilt Real- und Imaginärteil einzeln durch den reellen Nenner. Eine Probe durch Multiplikation mit dem ursprünglichen Nenner ist schnell gemacht und sehr zu empfehlen.

Lösung zu Aufgabe 4

a) $z = \pm 3i$. Probe: $(3i)^2 = -9$.

b) $z = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i$. Probe:
$(-1+2i)^2 + 2(-1+2i) + 5 = -3 - 4i - 2 + 4i + 5 = 0$.
c) $z = \frac{3-i}{1+i} = 1 - 2i$ (siehe Aufgabe 3d). Probe: $(1+i)(1-2i) = 1 - 2i + i + 2 = 3 - i$.
d) $z = 2 \pm \sqrt{4-13} = 2 \pm 3i$. Die Lösungen sind konjugiert zueinander, weil die Koeffizienten reell sind.
Erläuterung: Quadratische Gleichungen löst man mit der bekannten Formel; ist die Diskriminante negativ, schreibt man ihre Wurzel als i mal Wurzel aus dem Betrag. Bei reellen Koeffizienten treten die Lösungen als konjugiertes Paar auf. Lineare Gleichungen löst man durch Division wie bei reellen Zahlen.

Lösung zu Aufgabe 5

a) Kreis um $1 + i$ mit Radius 2.
b) Gerade $y = x$ (Winkelhalbierende des ersten und dritten Quadranten).
c) Alle Punkte mit gleichem Abstand zu 1 und -1: die imaginäre Achse (Mittelsenkrechte). Nachrechnen: $(x-1)^2 + y^2 = (x+1)^2 + y^2 \Rightarrow x = 0$.
d) Rechte Hälfte der Einheitskreisscheibe (Halbkreisfläche, Rand eingeschlossen).

Lösung zu Aufgabe 6

a) $r = \sqrt{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$: $z = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$.
b) $r = 2$, $\varphi = \pi$: $z = 2e^{i\pi}$.
c) $r = \sqrt{2}$, dritter Quadrant: $\varphi = -\frac{3\pi}{4}$: $z = \sqrt{2}\, e^{-3\pi i/4}$.
d) $r = \sqrt{3+1} = 2$, vierter Quadrant: $\varphi = -\frac{\pi}{6}$: $z = 2e^{-i\pi/6}$.
Erläuterung: Der Betrag ist $\sqrt{a^2+b^2}$. Für das Argument liefert $\arctan \frac{b}{a}$ nur Winkel im ersten und vierten Quadranten. Liegt der Punkt links der imaginären Achse, muss man π addieren oder subtrahieren. Eine Skizze in der Zahlenebene verhindert Quadrantenfehler zuverlässig.

Lösung zu Aufgabe 7

a) $4 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = 2 + 2\sqrt{3}\, i$.
b) $2(\cos\pi + i \sin\pi) = -2$.
c) $3(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i \sin(-\frac{\pi}{2})) = -3i$.
d) $\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right) = 1 + i$.
Erläuterung: Mit $re^{i\varphi} = r\cos\varphi + i\, r \sin\varphi$ setzt man die bekannten Werte von Sinus und Kosinus ein. Die Werte für $30°$, $45°$, $60°$ und die Vielfachen von $90°$ sollte man auswendig kennen. Eine Kontrolle: Der Betrag des Ergebnisses muss wieder r sein.

Lösung zu Aufgabe 8

a) $1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$, also $(\sqrt{2})^8 e^{2\pi i} = 16$.

b) $\sqrt{3}+i = 2e^{i\pi/6}$, also $2^6 e^{i\pi} = -64$.
c) $1-i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$: $(\sqrt{2})^{10} e^{-10\pi i/4} = 32e^{-5\pi i/2} = 32e^{-i\pi/2} = -32i$.
Erläuterung: In der Polarform potenziert man den Betrag und multipliziert das Argument mit dem Exponenten. Anschließend reduziert man das Argument modulo 2π und rechnet in die Form $a+bi$ zurück. Das ist viel schneller und sicherer als achtmaliges Ausmultiplizieren mit dem binomischen Satz.

Lösung zu Aufgabe 9

a) $z_k = 2e^{i(\pi+2\pi k)/3}$: $1+\sqrt{3}i$, -2, $1-\sqrt{3}i$; gleichseitiges Dreieck auf dem Kreis mit Radius 2.
b) $z_k = 2e^{i\pi k/2}$: $2,\ 2i,\ -2,\ -2i$; Quadrat.
c) $(2+i)^2 = 4+4i-1 = 3+4i$. Die zweite Lösung ist $-(2+i) = -2-i$. Mehr als zwei gibt es nicht.
Erläuterung: Die n Lösungen von $z^n = w$ haben alle denselben Betrag und unterscheiden sich im Argument jeweils um $\frac{2\pi}{n}$.

Lösung zu Aufgabe 10

a) $z = i \pm \sqrt{i^2-3} = i \pm \sqrt{-4} = i \pm 2i$, also $z = 3i$ oder $z = -i$. Probe $z=3i$: $-9-2i\cdot 3i+3 = -9+6+3 = 0$.
b) $z = \pm 2i$.
c) Diskriminante $\left(\frac{3+i}{2}\right)^2 - (2+i) = \frac{8+6i}{4} - 2 - i = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$. Man findet $z_1 = 1$ (denn $1-3-i+2+i=0$) und mit Vieta $z_1 z_2 = 2+i$, also $z_2 = 2+i$. Probe: $1+(2+i) = 3+i$.
Erläuterung: Die Lösungsformel gilt auch für komplexe Koeffizienten; man muss nur die Wurzel der Diskriminante als komplexe Zahl bestimmen. Die Probe durch Einsetzen ist hier besonders wichtig.

Lösung zu Aufgabe 11

a) $\omega L = 100\cdot 0{,}2 = 20\,\Omega$; $\frac{1}{\omega C} = \frac{1}{100\cdot 250\cdot 10^{-6}} = 40\,\Omega$.
b) $Z = 30 + i(20-40) = 30-20i$ in Ohm.
c) $|Z| = \sqrt{900+400} \approx 36{,}06\,\Omega$; $\varphi = \arctan\frac{-20}{30} \approx -33{,}7^\circ$ (kapazitiv, der Strom eilt der Spannung voraus).
d) $I = \frac{230}{36{,}06} \approx 6{,}38$ A.
Erläuterung: Spule und Kondensator verschieben die Phase in entgegengesetzte Richtungen; ihre Blindwiderstände werden deshalb mit verschiedenem Vorzeichen addiert. Der Betrag der Impedanz bestimmt die Stromstärke, das Argument die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung. Überwiegt der Kondensator, ist der Imaginärteil negativ und der Strom eilt der Spannung voraus.

Lösung zu Aufgabe 12

a) $Z_1 + Z_2 = 4 + 2i$.
b) $Z_1 Z_2 = (3+4i)(1-2i) = 3 - 6i + 4i + 8 = 11 - 2i$.
$Z_p = \frac{11-2i}{4+2i} = \frac{(11-2i)(4-2i)}{20} = \frac{44-22i-8i-4}{20} = \frac{40-30i}{20} = 2 - \frac{3}{2}i$.
c) $\frac{1}{Z_1} = \frac{3-4i}{25}$, $\frac{1}{Z_2} = \frac{1+2i}{5} = \frac{5+10i}{25}$; Summe $\frac{8+6i}{25}$. Und $\frac{1}{Z_p} = \frac{2+1{,}5i}{6{,}25} = \frac{8+6i}{25}$. ✓
d) Reihe: $|4+2i| = \sqrt{20} \approx 4{,}47\,\Omega$. Parallel: $|2 - 1{,}5i| = \sqrt{6{,}25} = 2{,}5\,\Omega$. Die Reihenschaltung hat die größere Impedanz.
Erläuterung: Für Impedanzen gelten dieselben Regeln wie für ohmsche Widerstände: In Reihe addiert man sie, parallel addiert man die Kehrwerte. Mit komplexen Zahlen lassen sich so Wechselstromnetze genauso berechnen wie Gleichstromnetze, nur dass Division und Multiplikation komplex sind.

Lösung zu Aufgabe 13

a) $i(3+i) = 3i + i^2 = -1 + 3i$, also $(-1|3)$.
b) $(3+i)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{3-\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{3}+1}{2}i \approx 0{,}634 + 3{,}098i$.
c) $|ze^{i\alpha}| = |z| \cdot |e^{i\alpha}| = |z| \cdot 1$.
d) Multiplikation mit $\sqrt{2}\,e^{i\pi/4} = 1 + i$.
Erläuterung: Eine Drehung um den Ursprung um den Winkel α ist die Multiplikation mit $e^{i\alpha}$; für 90° ist das die Multiplikation mit i. Soll um einen anderen Punkt gedreht werden, verschiebt man diesen zuerst in den Ursprung, dreht und verschiebt zurück. Spiele berechnen genau so die Bewegung ihrer Figuren.

Lösung zu Aufgabe 14

a) $0 \cdot w = 0$, $1 \cdot w = 1 + i$, $(1+i)(1+i) = 2i$, $i(1+i) = -1 + i$.
b) $w = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$: Drehung um 45°, Streckung um $\sqrt{2}$.
c) Seitenlänge $\sqrt{2}$, Fläche $(1{,}4142)^2 = 2$; allgemein wächst die Fläche um $|w|^2 = 2$.
d) $1 \cdot w^3 = (1+i)^3 = (1+i) \cdot 2i = -2 + 2i$.
Erläuterung: Die Multiplikation mit $w = 1 + i$ dreht um 45° und streckt mit dem Faktor $\sqrt{2}$; Flächen wachsen deshalb um den Faktor 2.

Lösung zu Aufgabe 15

a) $m_0 = i$. $m_3 = i\,e^{-i\pi/2} = i \cdot (-i) = 1$.
b) $m_2 = i\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right) = i\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \approx 0{,}866 + 0{,}5i$.
c) $|m_k| = |i| \cdot |e^{-i\pi k/6}| = 1$. $m_k^{12} = i^{12}e^{-2\pi ik} = 1 \cdot 1 = 1$, da $i^{12} = (i^4)^3 = 1$.
d) Die Marken sind i mal alle zwölften Einheitswurzeln; die Summe der Einheitswurzeln ist 0 (geometrische Summe $\frac{1-\omega^{12}}{1-\omega} = 0$). Anschaulich heben sich gegenüberliegende Marken auf.
Erläuterung: Die Uhr läuft im Uhrzeigersinn, also mit negativem Drehwinkel; eine

Stunde entspricht $30^\circ = \frac{\pi}{6}$.

Lösung zu Aufgabe 16

a) Ausklammern: $(z-1)(z^2+1)$. Nullstellen $1,\ i,\ -i$. Über $\mathbb{R}$: $(z-1)(z^2+1)$; über $\mathbb{C}$: $(z-1)(z-i)(z+i)$.
b) $z^4+4 = (z^2-2z+2)(z^2+2z+2)$. Nullstellen $1\pm i$, $-1\pm i$. Über $\mathbb{C}$ vier Linearfaktoren, über $\mathbb{R}$ die zwei quadratischen Faktoren.
c) $z^3=1$: Einheitswurzeln $1,\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$. Über $\mathbb{R}$: $(z-1)(z^2+z+1)$.

Lösung zu Aufgabe 17

a) $0,\ 1,\ 2,\ 5,\ 26,\ldots$: wächst rasch, divergent.
b) $z_1=i$, $z_2=-1+i$, $z_3=(-1+i)^2+i=-2i+i=-i$, $z_4=-1+i$, $z_5=-i$: die Folge wiederholt sich, bleibt also beschränkt.
c) $z_1=1+i$, $z_2=(1+i)^2+1+i=2i+1+i=1+3i$,
$z_3=(1+3i)^2+1+i=-8+6i+1+i=-7+7i$. $|z_3|=\sqrt{98}\approx 9{,}90>2$.
d) Nur $c=i$ gehört zur Menge. $c=1$ und $c=1+i$ divergieren.
Erläuterung: Sobald $|z_n|>2$ gilt, wächst die Folge sicher über alle Grenzen.

Lösung zu Aufgabe 18

a) Mit $z=a+bi$, $w=c+di$: $zw=(ac-bd)+(ad+bc)i$, also
. □
b) . □
c) $|z+w|^2=(z+w)(\bar z+\bar w)=|z|^2+|w|^2+z\bar w+\bar z w=|z|^2+|w|^2+2\,\mathrm{Re}(z\bar w)$. Wegen $\mathrm{Re}(z\bar w)\le|z\bar w|=|z||w|$ folgt $|z+w|^2\le(|z|+|w|)^2$. □
d) $z+\frac{1}{z}=z+\frac{\bar z}{|z|^2}$ hat den Imaginärteil $\mathrm{Im}\,z\left(1-\frac{1}{|z|^2}\right)$. Er verschwindet genau für $\mathrm{Im}\,z=0$ oder $|z|=1$. □

Lösung zu Aufgabe 19

a) Mit $c=\cos\varphi$, $s=\sin\varphi$:
$(c+is)^3=c^3+3c^2(is)+3c(is)^2+(is)^3=c^3-3cs^2+i(3c^2s-s^3)$.
b) Realteil: $\cos 3\varphi=c^3-3cs^2=c^3-3c(1-c^2)=4c^3-3c$. □
c) Imaginärteil: $\sin 3\varphi=3c^2s-s^3=3(1-s^2)s-s^3=3s-4s^3$. □
d) $\cos 180^\circ=-1$ und $4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3-3\cdot\frac{1}{2}=-1{,}0$. $\sin 180^\circ=0$ und
$3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-4\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}=0$.

Erläuterung: Zwei komplexe Zahlen sind gleich, wenn Real- und Imaginärteile übereinstimmen. Diesen Vergleich nutzt man, um aus einer einzigen komplexen Gleichung zwei reelle Formeln zu gewinnen. Die Formeln für den dreifachen Winkel lassen sich so ohne mehrfache Anwendung der Additionstheoreme herleiten.

Lösung zu Aufgabe 20

a) $\sum \omega^k = \frac{1-\omega^n}{1-\omega} = \frac{1-1}{1-\omega} = 0$, da $\omega \neq 1$. $\square$
b) $1 + i + (-1) + (-i) = 0$.
c) $n = 3$: $1 \cdot \omega \cdot \omega^2 = \omega^3 = 1$. $n = 4$: $1 \cdot i \cdot (-1) \cdot (-i) = i \cdot i = -1$.
d) Für das Polynom $z^n - 1 = \prod(z - \omega_k)$ ist das konstante Glied $-1 = (-1)^n \prod \omega_k$, also $\prod \omega_k = (-1)^{n-1}$.
Erläuterung: Die Einheitswurzeln liegen als Ecken eines regelmäßigen n-Ecks auf dem Einheitskreis; ihr Schwerpunkt ist der Ursprung, daher ist ihre Summe null.