Lösungen zur Klassenarbeit - Folgen und Grenzwerte

Klasse: Studium 1 Semester · Dauer: 60 Minuten · /20

Lösung zu Aufgabe 1 (6 BE/Punkte)

a) Höchste Potenz ausklammern: $\frac{4-1/n}{2+3/n^2} \to 2$ (2 P.).

b) Erweitern: $\frac{3n}{\sqrt{n^2+3n}+n} = \frac{3}{\sqrt{1+3/n}+1} \to \frac{3}{2}$ (2 P.).

c) [redacted] für $n > \frac{4}{\varepsilon} - 1$; für $\varepsilon = 0{,}01$ genügt $N = 400$ (2 P.).

Bei a) haben Zähler und Nenner den gleichen Grad; der Grenzwert ist das Verhältnis der Leitkoeffizienten $\frac{4}{2}$. Bei b) liegt die Form $\infty - \infty$ vor, deshalb erweitert man mit der Summe. In c) muss N nur von ε abhängen; Kontrolle: $\frac{4}{401} \approx 0{,}00998$ liegt unter $0{,}01$, $\frac{4}{400}$ dagegen nicht.

Lösung zu Aufgabe 2 (4 BE/Punkte)

a) a_1; aus a_n folgt a_{n+1}. $a_{n+1}^2 - a_n^2 = 6 + a_n - a_n^2 = (3 - a_n)(2 + a_n) > 0$ (3 P.).

b) Konvergenz nach dem Monotoniekriterium; $a^2 = 6 + a$ liefert $a = 3$ (1 P.).

Beide Eigenschaften werden durch vollständige Induktion bewiesen: Die Schranke benutzt die Monotonie der Wurzelfunktion, die Monotonie die Faktorisierung von $6 + a - a^2$. Erst danach darf man in der Rekursion zum Grenzwert übergehen. Die Gleichung $a^2 = a + 6$ hat die Lösungen 3 und -2; die negative scheidet aus, weil alle Glieder positiv sind.

Lösung zu Aufgabe 3 (4 BE/Punkte)

a) $c_n = 1{,}0 \cdot 0{,}85^n$ (1 P.).

b) $0{,}85^n \to 0$, Grenzwert 0 (1 P.).

c) $0{,}85^n \frac{\ln 5}{\ln(1/0{,}85)} \approx 9{,}9$. Nach 10 Stunden ($0{,}85^{10} \approx 0{,}197$) (2 P.).

Ein Abbau um fünfzehn Prozent bedeutet, dass jede Stunde $85\,\%$ des Wertes übrig bleiben; die Folge ist geometrisch. Wegen 0 strebt sie gegen null. Für c) logarithmiert man und rundet auf die nächste volle Stunde auf, denn nach neun Stunden liegt der Wert mit etwa $0{,}232$ Promille noch über der Grenze.

Lösung zu Aufgabe 4 (3 BE/Punkte)

a) $a_{2k} = 1 + \frac{1}{2k} \to 1$ und $a_{2k+1} = -1 + \frac{1}{2k+1} \to -1$: Häufungspunkte 1 und -1 (2 P.).

b) Eine konvergente Folge hat genau einen Häufungspunkt, hier gibt es zwei: divergent (1 P.).

Gerade und ungerade Indizes bilden zwei Teilfolgen, deren Grenzwerte man getrennt berechnet; der Summand $\frac{1}{n}$ strebt in beiden gegen null. Da eine konvergente Folge

nur einen einzigen Häufungspunkt besitzen kann, beweisen die zwei verschiedenen Werte die Divergenz. Die Folge ist trotzdem beschränkt: Alle Glieder liegen zwischen -1 und $\frac{3}{2}$.

Lösung zu Aufgabe 5 (3 BE/Punkte)

a) $|\cos n| \leq 1$, also $|a_n| \leq \frac{1}{n^2+1} \to 0$ (1 P.).

b) Wegen $2^n \geq \frac{n(n-1)}{2}$ gilt $0 \leq \frac{n}{2^n} \leq \frac{2}{n-1} \to 0$ (2 P.).

Beim Einschließungskriterium sucht man eine einfache obere Schranke, die gegen null strebt; die untere ist hier 0 beziehungsweise $-$ dieselbe Schranke. In b) folgt die Ungleichung $2^n \geq \binom{n}{2}$ aus dem binomischen Satz für $(1+1)^n$. Damit wird sichtbar, dass die Exponentialfunktion schneller wächst als jede lineare Funktion.