Lernzettel - Folgen und Grenzwerte

Klasse: Studium 1 Semester

Einstieg: Zenon und die Schildkröte

Achilles läuft zehnmal so schnell wie die Schildkröte, die einen Vorsprung von 100 m hat. Wenn Achilles die 100 m gelaufen ist, ist die Schildkröte 10 m weiter, nach weiteren 10 m ist sie 1 m weiter, und so fort. Zenon schloss daraus, Achilles könne die Schildkröte nie einholen. Heute beschreiben wir die Situation mit einer Folge: Die Abstände $100,\ 10,\ 1,\ 0{,}1,\ldots$ bilden eine Nullfolge, und ihre Summe ist endlich. Der Begriff des Grenzwerts macht aus dem Paradoxon eine einfache Rechnung. Die Analysis des ersten Semesters beginnt genau hier: mit der präzisen Frage, was es heißt, dass sich die Glieder einer Folge einem Wert beliebig genau nähern.

Folgen und die Epsilon-Definition

Definition: Folgen und die Epsilon-Definition

Eine **Folge** reeller Zahlen ist eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$, geschrieben $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Die Folge **konvergiert gegen** $a \in \mathbb{R}$, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N: \quad |a_n - a|$$

Merke

Man schreibt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Anschaulich: Ab einem Index N liegen *alle* Folgenglieder in der ε-Umgebung $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$, egal wie klein ε gewählt ist. Eine Folge, die nicht konvergiert, heißt **divergent**. Der Grenzwert ist, falls er existiert, eindeutig. Eine Folge heißt **Nullfolge**, wenn sie gegen 0 konvergiert; $a_n \to a \iff |a_n - a| \to 0$.

Merke

Ein Beweis mit der Definition folgt immer demselben Muster: *Rechnung auf Vorrat*: Man schätzt $|a_n - a|$ so ab, dass die Bedingung in eine Ungleichung für n übergeht, und wählt dann N passend (Archimedisches Prinzip).

Rechenregeln und wichtige Grenzwerte

Definition: Rechenregeln und wichtige Grenzwerte

Seien $a_n \to a$ und $b_n \to b$. Dann gelten die **Grenzwertsätze**: $a_n \pm b_n \to a \pm b$, $a_n b_n \to ab$, $c\,a_n \to ca$, und $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$ falls $b \neq 0$ (und $b_n \neq 0$). Bei Brüchen aus Polynomen kürzt man mit der höchsten Potenz von n: $\frac{2n^2+3n}{n^2-1} = \frac{2+3/n}{1-1/n^2} \to 2$. Weitere

Standardgrenzwerte: $\frac{1}{n^p} \to 0$ für $p > 0$; $q^n \to 0$ für $|q|$; $\sqrt[n]{a} \to 1$ für $a > 0$; $\sqrt[n]{n} \to 1$; $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \to e^x$; $\frac{n!}{n^n} \to 0$. Der **Einschließungssatz** (Sandwich-Satz): Gilt $a_n \leq c_n \leq b_n$ für fast alle n und $a_n \to a$, $b_n \to a$, dann $c_n \to a$. Bei Differenzen von Wurzeln erweitert man mit der Summe (dritte binomische Formel).

Beschränktheit und Monotonie

Definition: Beschränktheit und Monotonie

Eine Folge ist **beschränkt**, wenn es S mit $|a_n| \leq S$ für alle n gibt. Jede konvergente Folge ist beschränkt; die Umkehrung ist falsch ($(-1)^n$). Das **Monotoniekriterium** sagt: Jede *monoton wachsende, nach oben beschränkte* (oder monoton fallende, nach unten beschränkte) Folge konvergiert. Damit lassen sich rekursive Folgen behandeln: Man zeigt Monotonie und Beschränktheit (häufig per Induktion) und berechnet den Grenzwert aus der Fixpunktgleichung $a = f(a)$. Ein **Häufungspunkt** ist der Grenzwert einer Teilfolge; die Folge $a_n = (-1)^n$ hat die Häufungspunkte 1 und -1 und ist daher divergent. Nach **Bolzano-Weierstraß** besitzt jede beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge.

So gehst du vor: Grenzwert einer Folge bestimmen

1. Grenzwert raten (große n einsetzen).
2. Brüche mit der höchsten Potenz von n kürzen; Wurzeldifferenzen mit der Summe erweitern.
3. Grenzwertsätze und Standardgrenzwerte anwenden, notfalls Einschließungssatz.
4. Rekursive Folgen: Monotonie und Beschränktheit zeigen, dann $a = f(a)$ lösen.
5. Epsilon-Beweis: $|a_n - a|$ abschätzen und N in Abhängigkeit von ε wählen.

Beispiel 1 (Epsilon-Beweis)

Zu zeigen: $a_n = \frac{3n+1}{n+2} \to 3$. Es ist [redacted]. Zu $\varepsilon > 0$ wählt man $N > \frac{5}{\varepsilon}$. Für $n \geq N$ folgt $|a_n - 3|$. □

Beispiel 2 (Wurzeldifferenz)

$$\sqrt{n^2+n} - n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{1}{\sqrt{1+1/n}+1} \to \frac{1}{2}.$$

Beispiel 3 (rekursive Folge)

$a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$. Per Induktion gilt a_n und a_n. Damit konvergiert die Folge gegen ein L mit $L = \sqrt{2+L}$, also $L^2 - L - 2 = 0$, $L = 2$ (die Lösung -1 scheidet aus, da $a_n > 0$).

Epsilon-N-Beweise führen

Die Definition des Grenzwerts verlangt für *jedes* noch so kleine $\varepsilon > 0$ einen Index N, ab dem alle Folgenglieder höchstens den Abstand ε vom Grenzwert haben. Ein Beweis besteht deshalb immer aus zwei Teilen: einer Vorüberlegung auf dem Schmierzettel, in der man die Ungleichung $|a_n - a|$ nach n auflöst, und der eigentlichen Reinschrift, in der man N angibt und die Behauptung nachrechnet. Wichtig ist, dass N nur von ε abhängt, nicht von n. Dabei darf man abschätzen, solange man die Ungleichung vergrößert: Statt $|a_n - a|$ selbst zu lösen, sucht man einen einfacheren Term $b_n \geq |a_n - a|$ mit b_n für $n \geq N$.

So gehst du vor: Grenzwert mit der Epsilon-Definition beweisen

1. Vermuteten Grenzwert a bestimmen (zum Beispiel durch Kürzen oder Einsetzen großer n).
2. $|a_n - a|$ auf einen gemeinsamen Bruch bringen und vereinfachen.
3. Abschätzen: $|a_n - a| \leq b_n$ mit einem Term b_n, der leicht nach n auflösbar ist.
4. b_n nach n auflösen und N größer als die rechte Seite wählen (Archimedisches Prinzip).
5. Reinschrift: „Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $N > \ldots$. Für alle $n \geq N$ gilt $\ldots$.“

Beispiel 4 (Epsilon-N für einen Bruch)

Beweisen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n+1}{n+2} = 3$.

Es ist [redacted]. Zu $\varepsilon > 0$ wähle $N > \frac{5}{\varepsilon}$. Für $n \geq N$ gilt $\frac{5}{n+2}$. □
Für $\varepsilon = 0{,}01$ genügt etwa $N = 501$.

Das Sandwich-Lemma und wichtige Grenzwerte

Viele Folgen lassen sich nicht direkt mit den Rechenregeln behandeln, sind aber zwischen zwei Folgen mit gleichem Grenzwert eingeklemmt. Gilt $a_n \leq c_n \leq b_n$ für fast alle n und $\lim a_n = \lim b_n = a$, so gilt auch $\lim c_n = a$. Dieses **Einschließungskriterium** liefert zum Beispiel $\frac{\sin n}{n} \to 0$, denn $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$. Zu den wichtigsten Grenzwerten gehören: $q^n \to 0$ für $|q|$; $\sqrt[n]{a} \to 1$ für $a > 0$; $\sqrt[n]{n} \to 1$; $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \to e^x$; $\frac{n^k}{a^n} \to 0$ für $a > 1$; $\frac{a^n}{n!} \to 0$ und $\frac{n!}{n^n} \to 0$. Sie bilden die Hierarchie des Wachstums: Potenzen wachsen langsamer als Exponentialfunktionen, diese langsamer als die Fakultät, und die Fakultät langsamer als n^n.

Beispiel 5 (Sandwich mit der n-ten Wurzel)

Berechnen Sie $\lim \sqrt[n]{2^n + 3^n}$.

Es gilt $3^n \leq 2^n + 3^n \leq 2 \cdot 3^n$ und damit $3 \leq \sqrt[n]{2^n + 3^n} \leq 3\sqrt[n]{2}$. Weil $\sqrt[n]{2} \to 1$, ist die rechte Schranke gegen 3 konvergent. Das Sandwich-Lemma liefert den Grenzwert 3. Allgemein bestimmt der größte Summand das Wachstum.

Monotonie, Beschränktheit und rekursive Folgen

Das **Monotoniekriterium** besagt: Jede monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge reeller Zahlen konvergiert, und zwar gegen ihr Supremum; entsprechend konvergiert jede monoton fallende, nach unten beschränkte Folge gegen ihr Infimum. Der Satz folgt aus der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ und ist das wichtigste Werkzeug für rekursiv definierte Folgen, deren Grenzwert man nicht explizit kennt. Das Vorgehen ist stets dasselbe: Zuerst zeigt man durch vollständige Induktion Beschränktheit und Monotonie, woraus Konvergenz folgt. Danach nimmt man in der Rekursionsgleichung auf beiden Seiten den Grenzwert und erhält eine Gleichung für $a = \lim a_n$. Wer die Konvergenz nicht zuvor bewiesen hat, darf diesen Schritt nicht tun, denn für divergente Folgen liefert er Unsinn.

Beispiel 6 (Rekursive Wurzelfolge)

Zeigen Sie, dass $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ konvergiert, und bestimmen Sie den Grenzwert.

Beschränktheit: a_n für alle n: Es ist a_1, und aus a_n folgt $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$. Monotonie: $a_{n+1} > a_n$, denn $a_{n+1}^2 = 2 + a_n > a_n^2$ wegen $a_n^2 - a_n - 2 = (a_n - 2)(a_n + 1)$. Nach dem Monotoniekriterium existiert $a = \lim a_n$. Aus $a = \sqrt{2 + a}$ folgt $a^2 - a - 2 = 0$, also $a = 2$ (die Lösung -1 scheidet aus, da $a_n > 0$).

Teilfolgen, Häufungspunkte und Cauchy-Folgen

Eine **Teilfolge** entsteht, wenn man aus (a_n) unendlich viele Glieder in der ursprünglichen Reihenfolge auswählt. Ein **Häufungspunkt** ist der Grenzwert einer konvergenten Teilfolge. Eine konvergente Folge hat genau einen Häufungspunkt, den Grenzwert selbst. Hat eine Folge zwei verschiedene Häufungspunkte, divergiert sie; so lässt sich Divergenz von $(-1)^n$ schnell zeigen. Der **Satz von Bolzano-Weierstraß** garantiert: Jede beschränkte reelle Folge hat mindestens einen Häufungspunkt, also eine konvergente Teilfolge. Der größte Häufungspunkt heißt Limes superior, der kleinste Limes inferior. Eine Folge heißt **Cauchy-Folge**, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein N existiert, sodass $|a_n - a_m|$ für alle $n, m \geq N$ gilt. In $\mathbb{R}$ ist eine Folge genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist. Das Kriterium erlaubt es, Konvergenz zu beweisen, ohne den Grenzwert zu kennen.

Uneigentliche Grenzwerte und Vergleich von Wachstum

Eine Folge strebt **bestimmt gegen** $+\infty$, wenn sie schließlich jede Schranke überschreitet: Zu jedem M gibt es ein N mit $a_n > M$ für alle $n \geq N$. Man spricht dann von einem uneigentlichen Grenzwert, die Folge ist aber im Sinne der Definition divergent. Ist $a_n \to \infty$, so gilt $\frac{1}{a_n} \to 0$, und umgekehrt folgt aus einer positiven Nullfolge $b_n \to 0$, dass $\frac{1}{b_n} \to \infty$. Mit diesen Regeln kann man auch Quotienten behandeln, deren Nenner verschwindet. Um zwei Folgen im Wachstum zu vergleichen, bildet man den Quotienten: Geht $\frac{a_n}{b_n} \to 0$, wächst a_n langsamer als b_n; geht er gegen eine positive Konstante, wachsen beide gleich schnell. In der Informatik entspricht das der Einteilung von Algorithmen nach ihrer Laufzeit: linear, quadratisch, exponentiell.

Achtung: Typische Fehler bei Folgen

Aus $a_n \to a$ und $b_n \to b$ folgt $a_n / b_n \to a/b$ nur für $b \neq 0$. Bei $\infty - \infty$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ darf man nicht einfach „einsetzen“, sondern muss kürzen, erweitern oder die höchste Potenz ausklammern. Der Grenzwert einer rekursiven Folge darf erst nach dem Konvergenzbeweis aus der Fixpunktgleichung berechnet werden. Und: $|a_{n+1} - a_n| \to 0$ genügt nicht für die Konvergenz – das zeigen die Partialsummen der harmonischen Reihe $\sum \frac{1}{k}$, die gegen ∞ divergieren.

Wusstest du? Von Archimedes bis Cauchy

Schon Archimedes näherte den Kreisumfang durch Vielecke mit $6, 12, 24, 48, 96$ Seiten und erhielt eine Folge von Schranken für π. Der strenge Grenzwertbegriff entstand aber erst im 19. Jahrhundert: Augustin-Louis Cauchy führte 1821 die nach ihm benannten Folgen ein, Karl Weierstraß formulierte die heutige Epsilon-Sprache. Damit wurde die Analysis von anschaulichen Vorstellungen unabhängig und erreichte die logische Strenge, die man im Studium einübt.

Beispiel 7 (Cauchy-Kriterium anwenden)

Zeigen Sie, dass $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ eine Cauchy-Folge ist, deren Glieder abwechselnd größer und kleiner werden.

Für $m > n$ gilt [redacted], weil die Summanden abwechselnde Vorzeichen haben und im Betrag fallen. Zu $\varepsilon > 0$ wähle $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Für $m > n \geq N$ folgt $|a_m - a_n| \leq \frac{1}{n+1}$. Die Folge ist also eine Cauchy-Folge und damit konvergent, ohne dass man ihren Grenzwert (es ist $\ln 2$) kennen muss. Genau diese Überlegung führt später zum Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen.

Hinweis: Rechenhilfen für die Klausur

Bei gebrochen-rationalen Folgen klammern Sie in Zähler und Nenner die höchste Potenz von n aus; das Verhältnis der Leitkoeffizienten ist der Grenzwert, wenn die Grade gleich sind. Bei Wurzeldifferenzen erweitern Sie mit der Summe (dritte binomische Formel). Bei Folgen mit Potenzen vergleichen Sie die Basen: Die größte Basis gewinnt. Bei Unsicherheit berechnen Sie einige Folgenglieder mit dem Taschenrechner, um den Grenzwert zu vermuten, und beweisen die Vermutung danach.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Grenzwert $a = \lim a_n$ heißt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es N mit $|a_n - a|$ für alle $n \geq N$; N hängt nur von ε ab.
- Rechenregeln: Grenzwerte vertragen Summe, Produkt und Quotient (Nenner $\neq 0$); bei gebrochen-rationalen Folgen die höchste Potenz ausklammern, bei

Wurzeldifferenzen mit der Summe erweitern.
- Sandwich-Lemma: $a_n \le c_n \le b_n$ und $\lim a_n = \lim b_n = a$ liefert $\lim c_n = a$.
- Wichtige Grenzwerte: $q^n \to 0$ ($|q|$), $\sqrt[n]{n} \to 1$, $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \to e^x$; Wachstumshierarchie $n^k \ll a^n \ll n! \ll n^n$.
- Monotoniekriterium: monoton und beschränkt $\Rightarrow$ konvergent; bei rekursiven Folgen erst Monotonie und Schranke per Induktion, dann Fixpunktgleichung.
- Konvergente Folgen sind beschränkt und haben genau einen Häufungspunkt; zwei verschiedene Häufungspunkte beweisen Divergenz.
- Bolzano-Weierstraß: Jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge; in $\mathbb{R}$ sind Cauchy-Folgen genau die konvergenten Folgen.

Achtung

Typische Fehler: den Grenzwert in der Rekursion einsetzen, bevor die Konvergenz bewiesen ist; bei der Epsilon-Definition die Reihenfolge der Quantoren vertauschen (N darf von ε abhängen, nicht von n); aus $a_n \to 0$ und $b_n \to \infty$ auf $a_n b_n \to 0$ schließen. Aus $|a_n|$ konvergent folgt nicht, dass a_n konvergiert.

Ottos Tipp

Raten Sie zuerst den Grenzwert (Werte einsetzen), beweisen Sie ihn dann mit Grenzwertsätzen und nehmen Sie die Epsilon-Definition nur, wenn sie ausdrücklich verlangt ist.