Arbeitsblatt - Folgen und Grenzwerte

Klasse: Studium 1 Semester · 20

Der Rechenweg muss angegeben werden.

Aufgabe 1

Aufgabe 1 – Grenzwerte ablesen und Schranke bestimmen

Geben Sie den Grenzwert an und bestimmen Sie, ab welchem Index N alle Glieder weniger als $\varepsilon = 0{,}01$ vom Grenzwert entfernt sind.

a) $a_n = \frac{1}{n}$
b) $a_n = \frac{n}{n+1}$
c) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$
d) $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Aufgabe 2

Aufgabe 2 – Gebrochen-rationale Folgen

Berechnen Sie die Grenzwerte, indem Sie die höchste Potenz von n ausklammern.

a) $a_n = \frac{3n^2+2n}{n^2+4}$
b) $b_n = \frac{5n+2}{2n-1}$
c) $c_n = \frac{n^2+1}{n^3+2}$
d) $d_n = \frac{2^n+1}{2^{n+1}}$

Aufgabe 3

Aufgabe 3 – Wurzelausdrücke

Bestimmen Sie die Grenzwerte, indem Sie mit der konjugierten Summe erweitern (dritte binomische Formel).

a) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
b) $b_n = \sqrt{n^2+n} - n$
c) $c_n = n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right)$

Aufgabe 4

Aufgabe 4 – Epsilon-N-Beweise

Beweisen Sie mit der Definition und geben Sie N für $\varepsilon = 0{,}01$ an.

a) $\lim \frac{2n+1}{n+3} = 2$

b) $\lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$
c) $\lim \frac{3n-1}{n+1} = 3$

Aufgabe 5

Aufgabe 5 – Divergenz nachweisen

Zeigen Sie, dass die Folgen divergieren. Verwenden Sie Teilfolgen oder Unbeschränktheit.

a) $a_n = (-1)^n$
b) $b_n = n^2$
c) $c_n = \sin \frac{n\pi}{2}$
d) $d_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$

Aufgabe 6

Aufgabe 6 – Monotonie und Beschränktheit

Untersuchen Sie Monotonie und Beschränktheit und geben Sie an, ob die Folge konvergiert.

a) $a_n = \frac{n}{n+1}$
b) $b_n = \frac{n+1}{n}$
c) $c_n = (-1)^n n$
d) $d_n = \frac{2n-1}{n}$

Aufgabe 7

Aufgabe 7 – Der Wirkstoff im Blut

Ein Medikament wird im Körper stündlich um $30\,\%$ abgebaut. Direkt nach der Einnahme beträgt die Konzentration $c_0 = 80$ mg/l. Nach n Stunden ist $c_n = 80 \cdot 0{,}7^n$.

a) Geben Sie die Rekursionsformel c_{n+1} an.
b) Berechnen Sie c_1, c_2, c_3.
c) Begründen Sie, dass (c_n) monoton fällt und gegen 0 konvergiert.
d) Nach wie vielen vollen Stunden liegt die Konzentration unter 1 mg/l?

Aufgabe 8

Aufgabe 8 – Stetige Verzinsung

Eine Bank wirbt: „Ein Euro, 100 Prozent Zinsen pro Jahr, aber Zinsen werden n-mal im Jahr gutgeschrieben.“ Nach einem Jahr hat man $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ Euro.

a) Berechnen Sie a_1, a_2, a_{12}.
b) Berechnen Sie a_{365} und a_{10000} mit dem Taschenrechner und vergleichen Sie mit $e \approx 2{,}71828$.
c) Wie lautet der Grenzwert der Folge, und was bedeutet das für die Bank?

d) Bei $5\,\%$ Zins gilt $b_n = \left(1 + \frac{0{,}05}{n}\right)^n \to e^{0{,}05}$. Berechnen Sie den Endbetrag für *1000*\,€.

Aufgabe 9

Aufgabe 9 – Eingeklemmte Folgen

Bestimmen Sie die Grenzwerte mit dem Sandwich-Lemma und geben Sie die Schranken an.

a) $a_n = \frac{\sin n}{n}$
b) $b_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n}$
c) $c_n = \frac{n}{2^n}$ (benutzen Sie $2^n \geq \binom{n}{2}$)
d) $d_n = \frac{\cos n}{n^2+1}$

Aufgabe 10

Aufgabe 10 – Rekursive Wurzelfolge

Betrachten Sie $a_1 = \sqrt{2}$ und $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$.

a) Berechnen Sie a_2, a_3, a_4 auf vier Stellen.
b) Zeigen Sie durch Induktion a_n.
c) Zeigen Sie $a_{n+1} > a_n$.
d) Bestimmen Sie den Grenzwert.

Aufgabe 11

Aufgabe 11 – Wurzelziehen wie im Taschenrechner

Das Heron-Verfahren berechnet $\sqrt{5}$ durch $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{5}{a_n}\right)$ mit dem Startwert $a_1 = 3$. Es wird auch in Rechnern und Programmen benutzt.

a) Berechnen Sie a_2, a_3, a_4.
b) Zeigen Sie $a_n \geq \sqrt{5}$ für $n \geq 2$ mit der Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel.
c) Zeigen Sie, dass die Folge ab $n = 2$ fällt.
d) Berechnen Sie den Grenzwert aus der Fixpunktgleichung und vergleichen Sie mit a_4.

Aufgabe 12

Aufgabe 12 – Häufungspunkte bestimmen

Bestimmen Sie alle Häufungspunkte sowie Limes superior und Limes inferior.

a) $a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$
b) $b_n = \sin \frac{n\pi}{2}$
c) $c_n = n \bmod 3$ (Rest bei Division durch 3)
d) $d_n = \frac{1+(-1)^n}{2} \cdot n$

Aufgabe 13

Aufgabe 13 – Wachstum von Bakterien

In einer Petrischale wächst eine Kultur nach dem Modell $p_{n+1} = p_n + 0{,}2\,p_n\left(1 - \frac{p_n}{100}\right)$ (in Prozent der Schalenfläche pro Tag), $p_1 = 10$.

a) Berechnen Sie p_2 und p_3.
b) Zeigen Sie: Ist 0, so gilt p_n.
c) Folgern Sie die Konvergenz der Folge.
d) Bestimmen Sie den Grenzwert und deuten Sie ihn.

Aufgabe 14

Aufgabe 14 – Euler-Folge

Die Folge $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ konvergiert gegen e. Untersuchen Sie sie genauer.

a) Entwickeln Sie a_n mit dem binomischen Satz und zeigen Sie $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}\left(1 - \frac{j}{n}\right)$.
b) Folgern Sie $a_n \le \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.
c) Zeigen Sie $\frac{1}{k!} \le \frac{1}{2^{k-1}}$ für $k \ge 1$ und damit a_n.
d) Berechnen Sie a_{10}, a_{100} und prüfen Sie die Schranke $2 \le a_n$.

Aufgabe 15

Aufgabe 15 – Der springende Ball

Ein Basketball wird aus 2 m Höhe fallen gelassen und springt nach jedem Aufprall auf $60\,\%$ der vorherigen Höhe zurück. Die Höhe nach dem n-ten Aufprall ist $h_n = 2 \cdot 0{,}6^n$ Meter.

a) Berechnen Sie $h_1, \dots, h_4$.
b) Nach wie vielen Aufprällen springt der Ball weniger als 1 cm hoch?
c) Der Gesamtweg nach n Aufprällen ist $s_n = 2 + 2\sum_{k=1}^{n} h_k$. Zeigen Sie $s_n = 2 + 6(1 - 0{,}6^n)$.
d) Bestimmen Sie den Grenzwert von s_n und deuten Sie ihn.

Aufgabe 16

Aufgabe 16 – Wiederholtes Cosinus-Drücken

Stellen Sie Ihren Taschenrechner auf Bogenmaß, tippen Sie eine beliebige Zahl, zum Beispiel 1, und drücken Sie immer wieder die Cosinus-Taste. Das ergibt die Folge $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \cos a_n$.

a) Berechnen Sie a_2, a_3, a_4, a_5.
b) Erklären Sie, weshalb die Glieder abwechselnd über und unter dem Grenzwert liegen ($\cos$ ist auf $[0, 1]$ fallend).
c) Der Grenzwert a erfüllt $a = \cos a$. Begründen Sie mit dem Mittelwertsatz, dass

$|a_{n+1} - a| \leq \sin(1)\,|a_n - a|$ gilt.
d) Wie viele Schritte braucht man ungefähr, um drei Stellen zu erreichen?

Aufgabe 17

Aufgabe 17 – Wachstumshierarchie und Rechenzeit

Ein Programm hat die Laufzeit $T(n)$ für eine Eingabe der Größe n. Ein Rechner schafft 10^9 Operationen pro Sekunde.

a) Zeigen Sie $\frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n}$ und folgern Sie $\frac{n!}{n^n} \to 0$.
b) Zeigen Sie $\frac{2^n}{n!} \leq 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$ für $n \geq 2$ und folgern Sie $\frac{2^n}{n!} \to 0$.
c) Vergleichen Sie die Laufzeit eines Algorithmus mit n^2 und eines mit 2^n Operationen für $n = 60$.
d) Welchen Grenzwert hat $\frac{n^{100}}{2^n}$? Ab welchem Index lohnt sich das Exponentialverfahren nicht mehr?

Aufgabe 18

Aufgabe 18 – Beweise zu Grenzwerten

Beweisen Sie mit der Definition oder bekannten Sätzen.

a) Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig.
b) Jede konvergente Folge ist beschränkt.
c) Sind (a_n) und (b_n) Nullfolgen, so ist $(a_n + b_n)$ eine Nullfolge.
d) Ist (a_n) beschränkt und (b_n) eine Nullfolge, so ist $(a_n b_n)$ eine Nullfolge.

Aufgabe 19

Aufgabe 19 – Konvergent oder nicht? Ein Überblick

Entscheiden Sie, ob die Folgen konvergieren, und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an. Begründen Sie jeweils kurz.

a) $a_n = \frac{n^2+1}{n+1}$
b) $b_n = \frac{3^n}{n!}$
c) $c_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$
d) $d_n = n \sin \frac{1}{n}$
e) $e_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$

Aufgabe 20

Aufgabe 20 – Archimedes und die Zahl Pi

Archimedes näherte den Kreis durch regelmäßige Vielecke. Für den Einheitskreis hat das einbeschriebene n-Eck die Seitenlänge s_n, das $2n$-Eck die Seitenlänge

$s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}$. Das Sechseck hat $s_6 = 1$. Der halbe Umfang $u_n = \frac{n}{2} s_n$ ist eine Näherung für π.

a) Berechnen Sie u_6.
b) Berechnen Sie s_{12} und u_{12}.
c) Berechnen Sie u_{24} und u_{48} numerisch.
d) Warum ist (u_n) monoton wachsend und beschränkt? Welchen Grenzwert hat sie?