Lösungen - Folgen und Grenzwerte

Klasse: Studium 1 Semester

Lösung zu Aufgabe 1

a) Grenzwert 0. $\frac{1}{n}$ für $n > 100$, also $N = 101$.

b) Grenzwert 1. [redacted] für $n > 99$, also $N = 100$.

c) Grenzwert 0. [redacted] für $n \geq 101$.

d) Grenzwert 0. 2^{-n} gilt für $2^n > 100$, also $n \geq 7$ ($2^7 = 128$); $N = 7$.

Erläuterung: Man löst die Ungleichung $|a_n - a|$ nach n auf. Der kleinste Index, ab dem sie für alle weiteren n gilt, ist das gesuchte N. Bei fallenden Abständen genügt es, die Grenze genau zu bestimmen und das Gleichheitszeichen auszuschließen.

Lösung zu Aufgabe 2

a) $\frac{n^2(3+2/n)}{n^2(1+4/n^2)} \to \frac{3}{1} = 3$.

b) $\frac{n(5+2/n)}{n(2-1/n)} \to \frac{5}{2}$.

c) Der Nenner hat höheren Grad: $\frac{1/n+1/n^3}{1+2/n^3} \to 0$.

d) $\frac{2^n+1}{2\cdot 2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}} \to \frac{1}{2}$.

Erläuterung: Klammert man in Zähler und Nenner die höchste vorkommende Potenz von n aus, kürzt sie sich, und alle übrigen Summanden enthalten negative Potenzen von n, die gegen null gehen. Daraus ergibt sich die Faustregel: Bei gleichem Grad ist der Grenzwert das Verhältnis der Leitkoeffizienten, bei höherem Nennergrad ist er null, bei höherem Zählergrad divergiert die Folge. Bei Exponentialtermen klammert man die größte Basis aus.

Lösung zu Aufgabe 3

a) $\frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \to 0$.

b) $\frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{n}{n(\sqrt{1+1/n}+1)} = \frac{1}{\sqrt{1+1/n}+1} \to \frac{1}{2}$.

c) $\frac{n\cdot\frac{1}{n}}{\sqrt{1+1/n}+1} = \frac{1}{\sqrt{1+1/n}+1} \to \frac{1}{2}$.

Erläuterung: Bei Differenzen von Wurzeln liegt die unbestimmte Form $\infty - \infty$ vor. Erweitert man mit der Summe, entsteht nach der dritten binomischen Formel im Zähler eine Differenz der Radikanden, in der sich die großen Terme aufheben. Im Nenner steht dann eine Summe, die man durch Ausklammern der höchsten Potenz behandelt. So wird aus einem unübersichtlichen Ausdruck ein einfacher Bruch.

Lösung zu Aufgabe 4

a) [redacted]. Für $\varepsilon = 0{,}01$: $n > 497$, also $N = 498$ (Kontrolle: $\frac{5}{501}$, aber $\frac{5}{500} = 0{,}01$).
b) $\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\varepsilon^2}$. Für $\varepsilon = 0{,}01$: $n > 10\,000$, also $N = 10\,001$.
c) [redacted]. Für $\varepsilon = 0{,}01$: $n > 399$, also $N = 400$.
Erläuterung: Im Beweis gibt man zu beliebigem ε ein passendes N an; die Zahlenwerte für $\varepsilon = 0{,}01$ zeigen, wie groß N konkret wird.

Lösung zu Aufgabe 5

a) Teilfolge $a_{2k} = 1$, $a_{2k+1} = -1$: zwei Häufungspunkte, also divergent.
b) Unbeschränkt (für jedes M ist $n^2 > M$ für $n > \sqrt{M}$); konvergente Folgen sind beschränkt.
c) Teilfolgen: $c_{4k+1} = 1$, $c_{4k+3} = -1$, $c_{4k} = 0$: drei Häufungspunkte $1, -1, 0$.
d) $d_{2k} \to 1$ und $d_{2k+1} \to -1$: zwei Häufungspunkte, divergent.

Lösung zu Aufgabe 6

a) $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$: wachsend; 0: beschränkt. Konvergent gegen 1.
b) $b_n = 1 + \frac{1}{n}$ fällt streng, 1: beschränkt. Konvergent gegen 1.
c) Nicht monoton (wechselndes Vorzeichen), nicht beschränkt: divergent.
d) $d_n = 2 - \frac{1}{n}$ wächst, ist durch 2 beschränkt: konvergent gegen 2.
Erläuterung: Monotonie zeigt man über das Vorzeichen der Differenz $a_{n+1} - a_n$ oder über den Quotienten. Eine monotone und beschränkte Folge konvergiert nach dem Monotoniekriterium.

Lösung zu Aufgabe 7

a) $c_{n+1} = 0{,}7\, c_n$.
b) $c_1 = 56{,}0$, $c_2 = 39{,}20$, $c_3 = 27{,}440$ mg/l.
c) $c_{n+1} = 0{,}7 c_n$, und $0{,}7^n \to 0$ wegen $|q|$.
d) $80 \cdot 0{,}7^n \frac{\ln 80}{\ln(1/0{,}7)} \approx 12{,}29$. Nach 13 Stunden: $c_{13} \approx 0{,}78$ mg/l.
Erläuterung: Ein Abbau um $30\,\%$ bedeutet, dass jede Stunde $70\,\%$ übrig bleiben; die Folge ist geometrisch mit dem Faktor $0{,}7$. Wegen 0 fällt sie monoton gegen null. Den Zeitpunkt, an dem eine Schwelle unterschritten wird, findet man durch Logarithmieren; da nur volle Stunden gezählt werden, rundet man auf.

Lösung zu Aufgabe 8

a) $a_1 = 2$, $a_2 = 1{,}5^2 = 2{,}25$, $a_{12} = \left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12} \approx 2{,}6130$.
b) $a_{365} \approx 2{,}71457$, $a_{10000} \approx 2{,}71815$: Die Werte nähern sich e.
c) $\lim a_n = e \approx 2{,}718$. Selbst bei beliebig häufiger Gutschrift wächst das Guthaben nicht über e Euro; die Folge ist monoton wachsend und beschränkt.
d) *1000\cdot e^{0{,}05}\approx1000\cdot1{,}05127=1051{,}27\,€* (bei jährlicher

Verzinsung *1050\,€*).

Lösung zu Aufgabe 9

a) $-\frac{1}{n} \le a_n \le \frac{1}{n}$ und beide Schranken $\to 0$: $a_n \to 0$.
b) $3 \le b_n \le 3\sqrt[n]{2} \to 3$: $b_n \to 3$.
c) $2^n = (1+1)^n \ge \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, also $0 \le \frac{n}{2^n} \le \frac{2}{n-1} \to 0$.
d) $|d_n| \le \frac{1}{n^2+1} \le \frac{1}{n^2} \to 0$.
Erläuterung: Beim Sandwich-Lemma braucht man zwei einfache Folgen mit demselben Grenzwert, zwischen denen die gesuchte Folge liegt. Bei Sinus und Kosinus nutzt man $|\sin x| \le 1$, bei Summen von Potenzen schätzt man durch den größten Summanden ab.

Lösung zu Aufgabe 10

a) $a_2 = 1{,}8478$, $a_3 = 1{,}9616$, $a_4 = 1{,}9904$.
b) Induktionsanfang $\sqrt{2}$. Schritt: a_n.
c) $a_{n+1}^2 - a_n^2 = 2 + a_n - a_n^2 = (2 - a_n)(1 + a_n) > 0$ wegen a_n.
d) Monotonie und Beschränktheit liefern Konvergenz. Aus $a = \sqrt{2+a}$ folgt $a^2 - a - 2 = 0$, $a = 2$.
Erläuterung: Das Vorgehen ist typisch für rekursive Folgen: Man zeigt mit Induktion, dass die Folge beschränkt und monoton ist, schließt daraus auf Konvergenz und bestimmt erst danach den Grenzwert aus der Fixpunktgleichung.

Lösung zu Aufgabe 11

a) $a_2 = \frac{1}{2}(3 + \frac{5}{3}) = 2{,}33333$, $a_3 = 2{,}2380952$, $a_4 = 2{,}236068896$.
b) $a_{n+1} = \frac{a_n + 5/a_n}{2} \ge \sqrt{a_n \cdot 5/a_n} = \sqrt{5}$ (AM-GM).
c) $a_{n+1} - a_n = \frac{5 - a_n^2}{2a_n} \le 0$ für $a_n \ge \sqrt{5}$.
d) Aus $a = \frac{1}{2}(a + \frac{5}{a})$ folgt $a^2 = 5$, $a = \sqrt{5} \approx 2{,}23606798$. Schon a_4 stimmt auf sieben Stellen überein.
Erläuterung: Das Heron-Verfahren ist ein Spezialfall des Newton-Verfahrens. Die Anzahl der richtigen Stellen verdoppelt sich ungefähr in jedem Schritt, deshalb genügen wenige Iterationen für Taschenrechnergenauigkeit.

Lösung zu Aufgabe 12

a) Gerade n: $\to 1$, ungerade: $\to -1$. Häufungspunkte ± 1; $\limsup = 1$, $\liminf = -1$.
b) Werte $1, 0, -1, 0$ periodisch: Häufungspunkte $-1, 0, 1$.
c) Werte $1, 2, 0, 1, 2, 0, \ldots$: Häufungspunkte $0, 1, 2$.
d) Gerade n: $d_n = n \to \infty$; ungerade: $d_n = 0$. Einziger Häufungspunkt 0, aber die Folge ist unbeschränkt: Bolzano-Weierstraß gilt nur für beschränkte Folgen.

Lösung zu Aufgabe 13

a) $p_2 = 10 + 0{,}2 \cdot 10 \cdot 0{,}9 = 11{,}80$; $p_3 \approx 13{,}882$.
b) $p_{n+1} - p_n = 0{,}2\,p_n\left(1 - \frac{p_n}{100}\right) > 0$. Außerdem
$100 - p_{n+1} = (100 - p_n)\left(1 - 0{,}2\frac{p_n}{100}\right) > 0$, denn der zweite Faktor liegt in $(0, 1)$.
c) Die Folge ist monoton wachsend und durch 100 beschränkt, also konvergent.
d) Aus $L = L + 0{,}2L(1 - \frac{L}{100})$ folgt $L = 0$ oder $L = 100$. Wegen $p_n \geq 10$ ist $L = 100$: Die Kultur füllt langfristig die Schale (Sättigung).

Lösung zu Aufgabe 14

a) $\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!\,n^k} = \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}\frac{n-j}{n}$. Summation über k.
b) Jeder Faktor $1 - \frac{j}{n}$ liegt in $(0, 1]$, also ist jeder Summand höchstens $\frac{1}{k!}$.
c) $k! \geq 2^{k-1}$, da jeder Faktor $2, 3, \ldots, k$ mindestens 2 ist. Also $a_n \leq 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}$.
d) $a_{10} \approx 2{,}5937$, $a_{100} \approx 2{,}7048$; beide liegen in $[2; 3)$.
Erläuterung: Jeder Summand der binomischen Entwicklung wächst mit n, deshalb ist die Folge monoton wachsend.

Lösung zu Aufgabe 15

a) $h_1 = 1{,}20$, $h_2 = 0{,}720$, $h_3 = 0{,}4320$, $h_4 = 0{,}2592$ m.
b) $2 \cdot 0{,}6^n \frac{\ln 200}{\ln(1/0{,}6)} \approx 10{,}37$, also ab dem $11.$ Aufprall ($h_{11} \approx 0{,}73$ cm).
c) Geometrische Summe: $\sum_{k=1}^{n} h_k = 2 \cdot 0{,}6 \cdot \frac{1-0{,}6^n}{1-0{,}6} = 3(1 - 0{,}6^n)$. Also $s_n = 2 + 6(1 - 0{,}6^n)$.
d) Wegen $0{,}6^n \to 0$ gilt $s_n \to 2 + 6 = 8$ m. Obwohl der Ball unendlich oft aufschlägt, legt er nur 8 m zurück.

Lösung zu Aufgabe 16

a) $a_2 = 0{,}5403$, $a_3 = 0{,}8576$, $a_4 = 0{,}6543$, $a_5 = 0{,}7935$.
b) Ist $a_n > a$, so ist $a_{n+1} = \cos a_n$ (fallend), und umgekehrt: die Folge pendelt um a.
c) $|\cos x - \cos a| = |\sin\xi|\,|x - a| \leq \sin(1)\,|x - a|$ für $\xi \in [0, 1]$, und $\sin 1 \approx 0{,}84$. Der Fehler schrumpft mindestens um den Faktor $0{,}84$ pro Schritt (Kontraktion).
d) Grenzwert $a \approx 0{,}7391$. Fehler nach n Schritten etwa $0{,}84^n \cdot 0{,}3$: für einen Fehler unter 10^{-3} genügt die grobe Abschätzung ab $n \geq 33$ Schritte sicher. Mit dem tatsächlichen Faktor $|\sin a| \approx 0{,}67$ genügen schon etwa 15 Schritte.

Lösung zu Aufgabe 17

a) $\frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdots \frac{n}{n} \leq \frac{1}{n} \cdot 1 \cdots 1$. Sandwich: $0 \leq \frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n} \to 0$.
b) $\frac{2^n}{n!} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{2}{n} \leq 2 \cdot 1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$ für $n \geq 2$, und $\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \to 0$.
c) $60^2 = 3600$ Operationen $= 3{,}6\,\mu$s. $2^{60} \approx 1\,152\,921\,504\,606\,846\,976$ Operationen, das sind $\approx 36{,}6$ Jahre.
d) Der Grenzwert ist 0 (Exponentialfunktion schlägt jede Potenz), aber erst für sehr

großes n: Die Folge wächst zunächst bis etwa $n \approx 144$ (Maximum von $n^{100}/2^n$) und fällt dann. In der Praxis kann ein Polynomverfahren mit hohem Grad bei kleinem n schlechter sein als ein Exponentialverfahren.

Lösung zu Aufgabe 18

a) Angenommen $a_n \to a$ und $a_n \to b$ mit $a \neq b$. Für $\varepsilon = \frac{|a-b|}{2}$ liegen fast alle Glieder in beiden disjunkten Umgebungen – unmöglich. □
b) Zu $\varepsilon = 1$ gibt es N mit $|a_n - a|$ für $n \geq N$. Dann ist $|a_n| \leq \max\{|a_1|, \ldots, |a_{N-1}|, |a| + 1\}$. □
c) Zu $\varepsilon > 0$ wähle N_1, N_2 mit $|a_n|$, $|b_n|$. Für $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ gilt $|a_n + b_n|$. □
d) Sei $|a_n| \leq M$. Zu $\varepsilon > 0$ wähle N mit $|b_n|$ für $n \geq N$. Dann $|a_n b_n| \leq M|b_n|$. □

Lösung zu Aufgabe 19

a) Divergent gegen $+\infty$: Zählergrad größer als Nennergrad; $a_n \geq n - 1$.
b) Konvergent gegen 0: $\frac{a^n}{n!} \to 0$ (Wachstumshierarchie).
c) Konvergent gegen e^2 (Standardgrenzwert $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \to e^x$).
d) Konvergent gegen 1: Mit $x = \frac{1}{n}$ gilt $\frac{\sin x}{x} \to 1$.
e) Konvergent gegen 0: Mit $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ ist $e_n = \frac{1}{(n+1)^{2/3} + (n(n+1))^{1/3} + n^{2/3}} \to 0$.

Lösung zu Aufgabe 20

a) $u_6 = \frac{6}{2} \cdot 1 = 3$.
b) $s_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{3}} \approx 0{,}51764$, $u_{12} = 6 \cdot s_{12} \approx 3{,}10583$.
c) $u_{24} \approx 3{,}13263$, $u_{48} \approx 3{,}13935$.
d) Der halbe Umfang eines einbeschriebenen Vielecks ist kleiner als der halbe Kreisumfang π und wächst bei Verdopplung der Eckenzahl. Beschränkt und monoton, also konvergent; der Grenzwert ist π.