Klassenarbeit - Eigenwerte und Eigenvektoren

Klasse: Studium 1 Semester · Dauer: 60 Minuten · /20

Name:	Datum:	**Note: /20**

Aufgabe	1	2	3	4	5	Gesamt
Punkte	6	4	4	3	3	**20**
Note						

Der Rechenweg muss angegeben werden.

Aufgabe 1 (6 BE/Punkte)

Aufgabe 1 – Diagonalisierung

Gegeben ist $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte.
b) Bestimmen Sie zugehörige Eigenvektoren.
c) Geben Sie P und D mit $A = PDP^{-1}$ an.
d) Berechnen Sie A^3 (zum Beispiel direkt) und prüfen Sie die Spur: Was muss die Summe $1^3 + 6^3$ ergeben?

Aufgabe 2 (4 BE/Punkte)

Aufgabe 2 – Umzug zwischen Stadt und Land

Jedes Jahr ziehen $10\,\%$ der Stadtbevölkerung aufs Land, und $30\,\%$ der Landbevölkerung in die Stadt. Der Zustandsvektor ist $x = (s, l)^T$; $P = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}7 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von P.
b) Bestimmen Sie die stationäre Verteilung.
c) Anfangs wohnen $50\,\%$ in der Stadt. Wie sieht die Verteilung nach einem Jahr aus?

Aufgabe 3 (4 BE/Punkte)

Aufgabe 3 – Eigenwerte mit Parameter

Betrachten Sie $A_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte.
b) Für welche t ist A_t nicht invertierbar?
c) Ist A_t für jedes t diagonalisierbar? Begründen Sie.

Aufgabe 4 (3 BE/Punkte)

Aufgabe 4 – Wahr oder falsch?

Entscheiden Sie und begründen Sie kurz.

a) Jede reelle 2×2-Matrix besitzt einen reellen Eigenwert.
b) Hat eine $n \times n$-Matrix n verschiedene Eigenwerte, so ist sie diagonalisierbar.
c) 0 ist Eigenwert von A genau dann, wenn $\det A = 0$.

Aufgabe 5 (3 BE/Punkte)

Aufgabe 5 – Spur und Determinante

Eine 3×3-Matrix A hat die Eigenwerte 1, 2 und 4.

a) Bestimmen Sie $\operatorname{tr} A$ und $\det A$.
b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A^{-1} und $A^2 - A$.