Lösungen zur Klassenarbeit - Eigenwerte und Eigenvektoren

Klasse: Studium 1 Semester · Dauer: 60 Minuten · /20

Lösung zu Aufgabe 1 (6 BE/Punkte)

a) Spur 7, Determinante 6: $\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 6$ (2 P.).
b) $\lambda = 1$: $4x + 2y = 0$, $v_1 = (1, -2)^T$. $\lambda = 6$: $-x + 2y = 0$, $v_2 = (2, 1)^T$ (2 P.).
c) $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \operatorname{diag}(1, 6)$ (1 P.).
d) $A^2 = \begin{pmatrix} 29 & 14 \\ 14 & 8 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 173 & 86 \\ 86 & 44 \end{pmatrix}$. Spur $217 = 1 + 216$ ✓ (1 P.).
Für 2×2-Matrizen lautet das charakteristische Polynom $\lambda^2 - \operatorname{tr} A\,\lambda + \det A$. Die Eigenvektoren stehen senkrecht aufeinander, weil A symmetrisch ist. In P stehen die Eigenvektoren in derselben Reihenfolge wie die Eigenwerte in D. Die Spur von A^3 muss gleich $1^3 + 6^3 = 217$ sein; das ist eine bequeme Kontrolle der direkten Rechnung.

Lösung zu Aufgabe 2 (4 BE/Punkte)

a) Spur $1{,}6$, Determinante $0{,}63 - 0{,}03 = 0{,}6$: $\lambda = 1$ und $\lambda = 0{,}6$ (2 P.).
b) $-0{,}1s + 0{,}3l = 0$, $s = 3l$, also $(0{,}75; 0{,}25)$ (1 P.).
c) $x_1 = P(0{,}5; 0{,}5)^T = (0{,}6; 0{,}4)^T$: $60\,\%$ in der Stadt (1 P.).
Bei einer Übergangsmatrix mit Spaltensummen 1 ist 1 immer ein Eigenwert; der zugehörige Eigenvektor, normiert auf die Summe 1, beschreibt die stabile Verteilung. Der zweite Eigenwert $0{,}6$ gibt an, wie schnell Abweichungen von diesem Gleichgewicht abklingen: Sie schrumpfen jedes Jahr auf sechzig Prozent. Langfristig leben also drei Viertel der Bevölkerung in der Stadt.

Lösung zu Aufgabe 3 (4 BE/Punkte)

a) $(1 - \lambda)^2 - t^2 = 0$, $\lambda = 1 \pm t$ (2 P.).
b) $\det A_t = 1 - t^2 = 0$ für $t = \pm 1$; dann ist ein Eigenwert 0 (1 P.).
c) Ja, denn A_t ist reell symmetrisch (Spektralsatz); für $t = 0$ ist $A_0 = E$ (1 P.).
Das charakteristische Polynom ist eine Differenz zweier Quadrate und lässt sich ohne Lösungsformel faktorisieren. Ein Eigenwert null bedeutet, dass ein Vektor auf den Nullvektor abgebildet wird; dann ist die Matrix nicht invertierbar. Für die Diagonalisierbarkeit genügt die Symmetrie; alternativ zeigt man, dass für $t \neq 0$ zwei verschiedene Eigenwerte vorliegen und für $t = 0$ die Einheitsmatrix.

Lösung zu Aufgabe 4 (3 BE/Punkte)

a) Falsch: Die Drehung $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ hat $\lambda^2 + 1 = 0$ (1 P.).

b) Wahr: Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig, also gibt es n davon (1 P.).
c) Wahr: $\det(A - 0 \cdot E) = \det A = 0$ (1 P.).
Für a) reicht ein Gegenbeispiel; die Drehung um neunzig Grad lässt keine Richtung fest, deshalb hat sie keinen reellen Eigenwert. Bei b) wird ein Satz zitiert, dessen Beweis über Induktion läuft. In c) setzt man $\lambda = 0$ in das charakteristische Polynom ein. Jede Teilaufgabe wird nur bewertet, wenn eine Begründung vorliegt; ein bloßes „wahr“ zählt nicht.

Lösung zu Aufgabe 5 (3 BE/Punkte)

a) $\operatorname{tr} A = 7$, $\det A = 8$ (1 P.).
b) A^{-1}: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$; $A^2 - A$: $1 - 1 = 0$, $4 - 2 = 2$, $16 - 4 = 12$ (2 P.).
Die Spur ist die Summe, die Determinante das Produkt der Eigenwerte, jeweils mit Vielfachheit gezählt. Ist $Av = \lambda v$, so folgt $A^{-1}v = \lambda^{-1}v$ und $(A^2 - A)v = (\lambda^2 - \lambda)v$; Eigenvektoren bleiben also erhalten, nur die Eigenwerte werden durch dieselbe Formel transformiert. Da 0 kein Eigenwert von A ist, existiert die Inverse.