Lernzettel - Eigenwerte und Eigenvektoren

Klasse: Studium 1 Semester

Einstieg: Die Brücke, die zu schwingen beginnt

1940 stürzte die Tacoma-Narrows-Brücke in den USA bei mäßigem Wind ein: Der Wind regte eine Schwingung an, die genau zur Eigenfrequenz der Brücke passte. Solche Eigenfrequenzen sind Eigenwerte einer Matrix, die das Schwingungssystem beschreibt, und die zugehörigen Schwingungsformen sind die Eigenvektoren. Dieselbe Idee steckt hinter der Google-Suche (PageRank), hinter der Hauptkomponentenanalyse in der Statistik und hinter der Frage, wie sich eine Population langfristig entwickelt. Eigenvektoren sind die Richtungen, in denen eine lineare Abbildung besonders einfach wirkt: Sie streckt oder staucht dort nur, ohne zu drehen. Wer eine Matrix in diesen Richtungen betrachtet, kann sie auf eine Diagonalmatrix zurückführen und beliebige Potenzen im Kopf überblicken.

Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition: Eigenwerte und Eigenvektoren

Sei $A \in K^{n\times n}$. Eine Zahl $\lambda \in K$ heißt **Eigenwert** von A, wenn es einen Vektor $v \neq 0$ mit $Av = \lambda v$ gibt; v heißt **Eigenvektor** zu λ. Geometrisch wird v von der Abbildung nur gestreckt oder gestaucht (und evtl. umgekehrt), nicht gedreht. Die Gleichung $(A - \lambda E)v = 0$ hat genau dann eine nichttriviale Lösung, wenn $\det(A - \lambda E) = 0$. Das Polynom $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ heißt **charakteristisches Polynom**; es hat Grad n, und seine Nullstellen sind die Eigenwerte. Die Lösungsmenge von $(A - \lambda E)v = 0$ ist ein Unterraum, der **Eigenraum** E_λ. Für 2×2-Matrizen gilt $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{spur}(A)\lambda + \det A$.

Eigenschaften

Definition: Eigenschaften

Die Summe der Eigenwerte (mit Vielfachheit) ist die **Spur**, ihr Produkt die Determinante. Bei Dreiecksmatrizen stehen die Eigenwerte auf der Diagonalen. A ist genau dann invertierbar, wenn 0 kein Eigenwert ist. Ist λ Eigenwert von A, so ist λ^k Eigenwert von A^k. Eigenvektoren zu *verschiedenen* Eigenwerten sind linear unabhängig. Die **algebraische Vielfachheit** von λ ist die Vielfachheit als Nullstelle von χ_A, die **geometrische Vielfachheit** ist $\dim E_\lambda$; stets gilt geometrisch $\leq$ algebraisch. Über $\mathbb{R}$ kann χ_A komplexe Nullstellen haben (Drehungen); der Satz von Cayley-Hamilton besagt $\chi_A(A) = 0$.

Diagonalisierbarkeit

Definition: Diagonalisierbarkeit

A heißt **diagonalisierbar**, wenn es eine invertierbare Matrix P mit $P^{-1}AP = D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ gibt. Das ist genau dann der Fall, wenn es eine Basis aus Eigenvektoren gibt, also wenn für jeden Eigenwert geometrische $=$ algebraische Vielfachheit gilt (insbesondere, wenn n verschiedene Eigenwerte existieren). Die Spalten von P sind dann die Eigenvektoren. Der Nutzen: $A^k = PD^kP^{-1}$ mit $D^k = \operatorname{diag}(\lambda_i^k)$ lässt sich leicht berechnen. Anwendungen: Fibonacci-Folge, Markov-Ketten (stationäre Verteilung = Eigenvektor zum Eigenwert 1), Populationsmodelle, Differentialgleichungssysteme. Reelle **symmetrische** Matrizen sind stets diagonalisierbar, mit orthogonalen Eigenvektoren (Spektralsatz).

So gehst du vor: Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmen

1. Charakteristisches Polynom $\det(A - \lambda E)$ aufstellen.
2. Nullstellen λ_i berechnen.
3. Zu jedem λ_i das Gleichungssystem $(A - \lambda_i E)v = 0$ lösen.
4. Diagonalisierbar, wenn die geometrischen Vielfachheiten gleich den algebraischen sind.

Beispiel 1

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. $\chi_A = (2-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$. Eigenwerte 1 und 3. Für $\lambda = 3$: $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} v = 0 \Rightarrow v = (1, 1)$. Für $\lambda = 1$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} v = 0 \Rightarrow v = (1, -1)$.

Beispiel 2 (nicht diagonalisierbar)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: $\chi_A = (1-\lambda)^2$, algebraische Vielfachheit 2. Eigenraum: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v = 0 \Rightarrow v = (t, 0)$, Dimension 1. Geometrisch 1: nicht diagonalisierbar.

Beispiel 3 (Potenz)

Mit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \operatorname{diag}(1, 3)$ gilt $A^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n + 1 & 3^n - 1 \\ 3^n - 1 & 3^n + 1 \end{pmatrix}$. Für $n = 5$: $A^5 = \begin{pmatrix} 122 & 121 \\ 121 & 122 \end{pmatrix}$.

Das charakteristische Polynom in der Praxis

Ein Eigenvektor $v \neq 0$ erfüllt $Av = \lambda v$, also $(A - \lambda E)v = 0$. Dieses homogene System hat genau dann eine nichttriviale Lösung, wenn die Matrix $A - \lambda E$ nicht invertierbar ist, das heißt wenn $\det(A - \lambda E) = 0$. Die linke Seite ist ein Polynom vom Grad n in λ, das **charakteristische Polynom**. Seine Nullstellen sind die Eigenwerte. Bei 2×2-Matrizen gilt immer $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\,\lambda + \det A$, wobei die Spur $\operatorname{tr} A$ die Summe der Diagonalelemente ist. Das erspart Rechenarbeit: Man berechnet nur Spur und Determinante und löst die quadratische Gleichung. Bei Dreiecksmatrizen stehen die Eigenwerte direkt auf der Diagonale, weil das charakteristische Polynom ein Produkt von Linearfaktoren ist.

Beispiel 4 (2x2-Matrix mit reellen Eigenwerten)

Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren von $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Spur 7, Determinante $12 - 2 = 10$: $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$, also $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 5$. Für $\lambda_1 = 2$ lautet $A - 2E = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, die Gleichung $2x + y = 0$ liefert $v_1 = (1, -2)^T$. Für $\lambda_2 = 5$ ist $A - 5E = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, also $x = y$ und $v_2 = (1, 1)^T$. Probe: $Av_1 = (4 - 2,\, 2 - 6)^T = (2, -4)^T = 2v_1$ und $Av_2 = (5, 5)^T = 5v_2$.

Beispiel 5 (3x3-Matrix mit Blockstruktur)

Bestimmen Sie die Eigenwerte von .

Entwicklung von $\det(A - \lambda E)$ nach der ersten Zeile liefert $(2 - \lambda)\big[(3 - \lambda)(9 - \lambda) - 16\big] = (2 - \lambda)(\lambda^2 - 12\lambda + 11) = (2 - \lambda)(\lambda - 1)(\lambda - 11)$. Die Eigenwerte sind 1, 2 und 11. Kontrolle: Spur $2 + 3 + 9 = 14 = 1 + 2 + 11$ und Determinante $2 \cdot (27 - 16) = 22 = 1 \cdot 2 \cdot 11$.

Vielfachheiten und Diagonalisierbarkeit

Ein Eigenwert kann mehrfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms sein. Die Vielfachheit der Nullstelle heißt **algebraische Vielfachheit**. Die Dimension des Eigenraums $\ker(A - \lambda E)$ heißt **geometrische Vielfachheit**. Stets gilt: $1 \leq$ geometrische $\leq$ algebraische Vielfachheit. Eine Matrix ist genau dann diagonalisierbar, wenn das charakteristische Polynom über $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) vollständig in Linearfaktoren zerfällt und für jeden Eigenwert die beiden Vielfachheiten gleich sind. Haben alle n Eigenwerte verschiedene Werte, ist die Matrix automatisch diagonalisierbar. Symmetrische reelle Matrizen sind nach dem Spektralsatz immer diagonalisierbar, ihre Eigenwerte sind reell, und Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten stehen senkrecht aufeinander.

Beispiel 6 (Nicht diagonalisierbar)

Untersuchen Sie $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Spur 4, Determinante $3 + 1 = 4$: $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$. Der Eigenwert 2 hat algebraische Vielfachheit 2. Aus $B - 2E = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ folgt $x = y$: Der Eigenraum ist eindimensional, aufgespannt von $(1, 1)^T$. Geometrische Vielfachheit 1: Es gibt keine Basis aus Eigenvektoren, B ist nicht diagonalisierbar. Geometrisch wirkt B wie eine Scherung entlang der Geraden $y = x$.

Diagonalisieren und Potenzen berechnen

Sind $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängige Eigenvektoren, so erhält man mit der Matrix $P = (v_1 \mid \cdots \mid v_n)$ die Darstellung $A = PDP^{-1}$, wobei D die Diagonalmatrix der Eigenwerte ist. Daraus folgt $A^k = PD^kP^{-1}$, und D^k berechnet man, indem man jeden Eigenwert potenziert. Auf diese Weise sind Potenzen großer Ordnung leicht zu berechnen, und das Verhalten für $k \to \infty$ ist an den Eigenwerten ablesbar: Ist $|\lambda|$ für alle Eigenwerte, so konvergiert $A^k \to 0$; gibt es einen dominierenden Eigenwert mit $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, so bestimmt dieser das Langzeitverhalten.

Beispiel 7 (Fibonacci-Zahlen mit Eigenwerten)

Zeigen Sie, wie F_n mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ zusammenhängt.

Es gilt $\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}$, also $\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Das charakteristische Polynom $\lambda^2 - \lambda - 1$ hat die Nullstellen $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$ und $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0{,}618$. Daraus ergibt sich die Formel von Binet $F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$. Weil $|\psi|$, wächst F_n wie $\varphi^n/\sqrt{5}$, und das Verhältnis aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen strebt gegen den goldenen Schnitt φ.

Anwendungen: Markov-Ketten und Schwingungen

In einer **Markov-Kette** beschreibt eine spaltenstochastische Matrix P (Spaltensummen 1), mit welcher Wahrscheinlichkeit ein System von einem Zustand in einen anderen wechselt. Der Verteilungsvektor entwickelt sich nach $x_{k+1} = Px_k$. Jede solche Matrix hat den Eigenwert 1; der zugehörige Eigenvektor, auf Summe 1 normiert, ist die **stationäre Verteilung**, die sich langfristig einstellt. In der Mechanik führen gekoppelte Schwinger auf Gleichungen der Form $\ddot{x} = -Kx$; die Eigenwerte von K sind die Quadrate der Eigenfrequenzen, die Eigenvektoren die Schwingungsformen. In der Statistik liefern die Eigenvektoren der Kovarianzmatrix die Hauptachsen einer Punktwolke.

Ein weiteres wichtiges Anwendungsfeld ist die Hauptkomponentenanalyse: Man zerlegt die Kovarianzmatrix einer Messreihe in ihre Eigenvektoren und behält nur die Richtungen mit

den größten Eigenwerten, weil dort die meiste Streuung der Daten liegt. So komprimieren Programme Bilder und Messdaten, ohne die wesentliche Information zu verlieren. Auch bei der Stabilität technischer Systeme entscheidet das Vorzeichen der Eigenwerte, ob eine Störung abklingt oder aufschaukelt.

Achtung: Typische Fehler

Der Nullvektor ist nie ein Eigenvektor, auch wenn er $Av = \lambda v$ erfüllt. Eigenwerte dürfen null sein, genau dann ist A nicht invertierbar. Eigenwerte von $A + B$ sind nicht die Summen der Eigenwerte von A und B; Eigenwerte von AB nicht die Produkte. Bei der Berechnung von P^{-1} müssen die Spalten von P in derselben Reihenfolge stehen wie die Eigenwerte in D. Und schließlich: Wiederholte Eigenwerte bedeuten nicht automatisch fehlende Diagonalisierbarkeit – die Einheitsmatrix hat nur den Eigenwert 1 und ist trotzdem diagonal.

Wusstest du? Von „eigen“ bis PageRank

Das Wort „Eigenwert“ geht auf David Hilbert zurück, der um 1904 das deutsche „eigen“ im Sinn von „charakteristisch“ benutzte; im Englischen blieb „eigenvalue“ als Mischform erhalten. Den Algorithmus PageRank, mit dem Google 1998 Webseiten bewertete, kann man als Suche nach dem Eigenvektor zum Eigenwert 1 einer riesigen Link-Matrix verstehen. In der Quantenmechanik sind die möglichen Messwerte einer physikalischen Größe die Eigenwerte eines Operators.

Geometrische Deutung und komplexe Eigenwerte

Geometrisch beschreibt ein Eigenvektor eine Gerade durch den Ursprung, die von der Abbildung auf sich selbst abgebildet wird. Ein positiver Eigenwert streckt oder staucht entlang dieser Geraden, ein negativer spiegelt zusätzlich am Ursprung, und der Eigenwert null klappt die Gerade auf den Nullpunkt zusammen. Bei einer Drehung der Ebene um einen Winkel, der kein Vielfaches von 180° ist, gibt es keine reelle Eigenrichtung, denn jede Gerade wird gedreht. Das charakteristische Polynom $\lambda^2 - 2\cos\alpha\,\lambda + 1$ besitzt dann keine reelle Nullstelle, sondern das konjugiert komplexe Paar $e^{\pm i\alpha}$. Über den komplexen Zahlen zerfällt jedes Polynom in Linearfaktoren, und deshalb hat jede komplexe quadratische Matrix mindestens einen Eigenwert. Reelle Matrizen mit komplexen Eigenwerten beschreiben Drehstreckungen und treten bei gedämpften Schwingungen auf. Reelle Matrizen haben komplexe Eigenwerte immer paarweise konjugiert.

Hinweis: So lernen Sie das Thema für die Klausur

Prüfungsaufgaben fragen fast immer dieselbe Kette ab: Eigenwerte bestimmen, Eigenvektoren angeben, entscheiden, ob die Matrix diagonalisierbar ist, und gegebenenfalls eine Potenz berechnen. Üben Sie diese Kette mit 2×2-Matrizen, bis sie flüssig läuft, und gehen Sie danach zu 3×3-Matrizen mit Blockstruktur oder Dreiecksform über. Nutzen Sie Kontrollen: Die Spur muss die Summe der Eigenwerte sein, die Determinante ihr Produkt, und jede berechnete Eigenvektor-Gleichung $Av = \lambda v$ lässt sich durch eine Multiplikation sofort prüfen. Typische Punktverluste

entstehen, wenn der Nullvektor als Eigenvektor angegeben wird oder wenn die Reihenfolge der Spalten in P nicht zur Reihenfolge in D passt.

So gehst du vor: Vollständige Diagonalisierung

1. Charakteristisches Polynom berechnen und in Linearfaktoren zerlegen.
2. Für jeden Eigenwert den Eigenraum als Lösungsraum von $(A - \lambda E)x = 0$ bestimmen.
3. Prüfen: Summe der Dimensionen der Eigenräume $= n$? Wenn nein, nicht diagonalisierbar.
4. P aus den Eigenvektoren, D aus den Eigenwerten in gleicher Reihenfolge aufstellen und $AP = PD$ kontrollieren.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Ein Eigenvektor $v \neq 0$ erfüllt $Av = \lambda v$; der Eigenwert λ ist der Streckfaktor in dieser Richtung, der Nullvektor ist nie Eigenvektor.
- Eigenwerte sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\det(A - \lambda E)$; bei 2×2-Matrizen gilt $\lambda^2 - \operatorname{tr} A\, \lambda + \det A = 0$.
- Spur $=$ Summe der Eigenwerte, Determinante $=$ Produkt der Eigenwerte (mit Vielfachheit); A ist genau dann invertierbar, wenn 0 kein Eigenwert ist.
- Die Eigenräume $\ker(A - \lambda E)$ werden mit dem Gauß-Verfahren bestimmt; es gilt geometrische $\leq$ algebraische Vielfachheit.
- A ist diagonalisierbar $\iff$ es gibt eine Basis aus Eigenvektoren $\iff$ alle Vielfachheiten stimmen überein; n verschiedene Eigenwerte genügen.
- Aus $A = PDP^{-1}$ folgt $A^k = PD^kP^{-1}$; damit lassen sich Potenzen, Fibonacci-Zahlen und Markov-Ketten berechnen.
- Reelle symmetrische Matrizen haben reelle Eigenwerte und orthogonale Eigenvektoren (Spektralsatz).

Achtung

Häufige Fehler: den Nullvektor als Eigenvektor zulassen, nach den Eigenwerten die Eigenvektoren nicht berechnen, bei doppelten Eigenwerten die Dimension des Eigenraums nicht prüfen, und Eigenvektoren nicht bis auf Skalare auffassen ($2v$ ist ebenfalls Eigenvektor).

Ottos Tipp

Kontrollieren Sie Ihre Eigenwerte mit Spur und Determinante, und machen Sie für jeden Eigenvektor die Probe $Av = \lambda v$.