Arbeitsblatt - Eigenwerte und Eigenvektoren

Klasse: Studium 1 Semester · 20

Der Rechenweg muss angegeben werden.

Aufgabe 1

Aufgabe 1 – Eigenwerte ablesen

Bei Diagonal- und Dreiecksmatrizen stehen die Eigenwerte auf der Diagonale. Geben Sie die Eigenwerte an und nennen Sie je einen Eigenvektor.

a) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (Spiegelung an der Winkelhalbierenden)

Aufgabe 2

Aufgabe 2 – Charakteristisches Polynom

Bestimmen Sie für $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und je einen Eigenvektor. Prüfen Sie mit Spur und Determinante.

a) Stellen Sie $\det(A - \lambda E)$ auf.
b) Lösen Sie $\chi_A(\lambda) = 0$.
c) Bestimmen Sie die Eigenvektoren.
d) Kontrollieren Sie mit Spur und Determinante.

Aufgabe 3

Aufgabe 3 – Eigenvektor-Test

Gegeben ist $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Prüfen Sie durch Multiplikation, welche der Vektoren Eigenvektoren sind, und geben Sie gegebenenfalls den Eigenwert an.

a) $u = (1, 1)^T$
b) $v = (1, -1)^T$
c) $w = (1, 2)^T$
d) $2u$ und $-3v$

Aufgabe 4

Aufgabe 4 – Drei Typen von Matrizen

Bestimmen Sie die Eigenwerte (über $\mathbb{R}$) und entscheiden Sie, ob die Matrix diagonalisierbar ist.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (Drehung um 90°)

Aufgabe 5

Aufgabe 5 – Spur, Determinante und Folgerungen

Eine 2×2-Matrix A hat die Eigenwerte 2 und -3.

a) Bestimmen Sie $\operatorname{tr} A$ und $\det A$.
b) Welche Eigenwerte hat A^{-1}? Ist A invertierbar?
c) Welche Eigenwerte hat $A^2 - 3A$?
d) Welche Eigenwerte hat A^T? Begründen Sie.

Aufgabe 6

Aufgabe 6 – Dreiecks- und Blockmatrizen

Bestimmen Sie die Eigenwerte mit ihrer algebraischen Vielfachheit.

a)

b)

c) $\operatorname{diag}(1, 1, 1)$

Aufgabe 7

Aufgabe 7 – Eigenvektoren in drei Dimensionen

Für die Matrix sind die Eigenwerte $1, 2, 11$ bekannt.

a) Bestimmen Sie einen Eigenvektor zu $\lambda = 2$.
b) Bestimmen Sie einen Eigenvektor zu $\lambda = 1$.
c) Bestimmen Sie einen Eigenvektor zu $\lambda = 11$.

d) Prüfen Sie, dass die drei Eigenvektoren paarweise senkrecht stehen. Warum ist das kein Zufall?

Aufgabe 8

Aufgabe 8 – Kaninchen und der goldene Schnitt

Die Fibonacci-Folge $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ beschreibt idealisiert das Wachstum einer Kaninchenpopulation. In Matrixform: $\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom und die Eigenwerte φ und ψ.
b) Zeigen Sie $\varphi + \psi = 1$ und $\varphi\psi = -1$ und deuten Sie beides mit Spur und Determinante.
c) Berechnen Sie F_{10} aus der Formel von Binet $F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$ numerisch.
d) Wohin strebt F_{n+1}/F_n? Begründen Sie mit dem dominanten Eigenwert.

Aufgabe 9

Aufgabe 9 – Wetter als Markov-Kette

In einer Stadt folgt auf einen sonnigen Tag mit $80\,\%$ wieder ein sonniger Tag, auf einen Regentag mit $40\,\%$ ein sonniger Tag. Der Zustandsvektor ist $x = (s, r)^T$ (Anteil sonniger bzw. regnerischer Tage); $P = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}6 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass P spaltenstochastisch ist und berechnen Sie die Eigenwerte.
b) Bestimmen Sie die stationäre Verteilung (Eigenvektor zu 1, Summe der Einträge 1).
c) Heute ist es sonnig, $x_0 = (1, 0)^T$. Berechnen Sie x_1 und x_2.
d) Wie viele sonnige Tage erwartet man langfristig im Jahr (365 Tage)?

Aufgabe 10

Aufgabe 10 – Scherung und Streckung im Bildbearbeitungsprogramm

Ein Bildbearbeitungsprogramm streckt Bilder mit der Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Ein Pixelkreis vom Radius 1 wird dadurch zu einer Ellipse.

a) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenrichtungen.
b) Welche Halbachsen hat die Ellipse? In welche Richtungen zeigen sie?
c) Um welchen Faktor ändert sich der Flächeninhalt? Vergleichen Sie mit $\det A$.
d) Wohin wird der Punkt $(1, 0)$ abgebildet, und wie liegt er im Verhältnis zu den Eigenrichtungen?

Aufgabe 11

Aufgabe 11 – Diagonalisierung

Diagonalisieren Sie $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ mit den Eigenvektoren $v_1 = (1, -2)^T$ und $v_2 = (1, 1)^T$.

a) Stellen Sie P und D auf.
b) Berechnen Sie P^{-1}.
c) Prüfen Sie $AP = PD$.
d) Berechnen Sie A^5 mit $A^5 = PD^5P^{-1}$.

Aufgabe 12

Aufgabe 12 – Hohe Potenz einer symmetrischen Matrix

Berechnen Sie A^n für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ mit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \operatorname{diag}(-1, 3)$.

a) Bestimmen Sie P^{-1}.
b) Zeigen Sie $A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n + (-1)^n & 3^n - (-1)^n \\ 3^n - (-1)^n & 3^n + (-1)^n \end{pmatrix}$.
c) Berechnen Sie A^{10}.
d) Wie verhält sich A^n für große n? Welche Matrix beschreibt es näherungsweise?

Aufgabe 13

Aufgabe 13 – Das Spektraltheorem im Raum

Gegeben ist , eine reelle symmetrische Matrix.

a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und die Eigenwerte mit Vielfachheiten.
b) Bestimmen Sie eine Basis des Eigenraums zu $\lambda = 3$.
c) Finden Sie eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren.
d) Warum ist S diagonalisierbar, obwohl der Eigenwert 3 doppelt ist?

Aufgabe 14

Aufgabe 14 – Gekoppelte Pendel

Zwei gleiche Massen $m = 1$ kg hängen an Federn und sind durch eine Kopplungsfeder verbunden. Die Auslenkungen $x = (x_1, x_2)^T$ erfüllen $\ddot{x} = -Kx$ mit $K = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ (in s^{-2}). Ansatz: $x(t) = v\cos(\omega t)$.

a) Zeigen Sie: Der Ansatz führt auf $Kv = \omega^2 v$, also ist ω^2 ein Eigenwert von K.
b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von K.

c) Berechnen Sie die beiden Eigenfrequenzen ω (in s^{-1}).
d) Beschreiben Sie die zugehörigen Schwingungsformen (gleichphasig oder gegenphasig).

Aufgabe 15

Aufgabe 15 – Eigenwerte mit Parameter

Betrachten Sie $A_t = \begin{pmatrix} 2 & t \\ t & 2 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte in Abhängigkeit von t.
b) Für welche t ist A_t invertierbar?
c) Für welche t sind beide Eigenwerte positiv?
d) Zeigen Sie, dass die Eigenvektoren nicht von t abhängen.

Aufgabe 16

Aufgabe 16 – Eine kleine Suchmaschine

Ein Mini-Internet besteht aus drei Seiten. Seite 1 verlinkt auf 2 und 3, Seite 2 verlinkt auf 3, Seite 3 verlinkt auf 1. Die Link-Matrix M (Spalte j = Verteilung der Wahrscheinlichkeit, von Seite j zu folgen) ist . Die Wichtigkeit x einer Seite erfüllt $Mx = x$.

a) Zeigen Sie, dass M spaltenstochastisch ist.
b) Lösen Sie $(M - E)x = 0$ und normieren Sie auf Summe 1.
c) Welche Seite ist am wichtigsten? Deuten Sie das Ergebnis.
d) Bei 10^6 zufälligen Besuchen: Wie viele entfallen jeweils auf die drei Seiten (Erwartungswert)?

Aufgabe 17

Aufgabe 17 – Zwei Wassertanks

Zwei Tanks sind durch Rohre verbunden. Die Wassermengen x_1, x_2 (in Litern) ändern sich nach $x' = Ax$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (in h^{-1}); zur Zeit 0 gilt $x(0) = (3, 1)^T$. Die Lösung hat die Form $x(t) = c_1 e^{3t}(1, 1)^T + c_2 e^{-t}(1, -1)^T$.

a) Bestätigen Sie, dass die beiden Ansätze Lösungen sind (Eigenwerte 3 und -1).
b) Bestimmen Sie c_1, c_2 aus $x(0) = (3, 1)^T$.
c) Berechnen Sie $x(1)$ numerisch.
d) Beschreiben Sie das Langzeitverhalten und die Rolle des größten Eigenwerts.

Aufgabe 18

Aufgabe 18 – Beweise zu Eigenwerten

Seien A eine $n \times n$-Matrix und λ ein Eigenwert mit Eigenvektor v. Beweisen Sie.

a) λ^k ist Eigenwert von A^k mit demselben Eigenvektor.
b) Gilt $A^2 = A$, so ist jeder Eigenwert 0 oder 1.
c) Eigenvektoren zu zwei verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.
d) Ist A invertierbar, so ist $\frac{1}{\lambda}$ Eigenwert von A^{-1}.

Aufgabe 19

Aufgabe 19 – Scherung: Wenn die Diagonalisierung scheitert

Die Scherung $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ verschiebt einen Punkt (x, y) zu $(x + y, y)$.

a) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenräume.
b) Begründen Sie, dass S nicht diagonalisierbar ist.
c) Berechnen Sie S^n und zeigen Sie die Formel durch Induktion.
d) Vergleichen Sie mit E, die ebenfalls nur den Eigenwert 1 hat, aber diagonalisierbar ist.

Aufgabe 20

Aufgabe 20 – Der Satz von Cayley-Hamilton

Der Satz von Cayley-Hamilton besagt, dass jede Matrix ihre eigene charakteristische Gleichung erfüllt. Für 2×2-Matrizen heißt das $A^2 - (\operatorname{tr} A)A + (\det A)E = 0$.

a) Bestätigen Sie den Satz für $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.
b) Folgern Sie daraus eine Formel für A^{-1} und berechnen Sie A^{-1}.
c) Berechnen Sie A^3 nur mit Hilfe von $A^2 = 7A - 10E$.
d) Prüfen Sie, dass A^{-1} die Eigenwerte $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{5}$ hat.