Lösungen - Eigenwerte und Eigenvektoren

Klasse: Studium 1 Semester

Lösung zu Aufgabe 1

a) Eigenwerte 3 und -2 mit den Eigenvektoren $e_1 = (1,0)^T$ und $e_2 = (0,1)^T$.
b) Eigenwerte 2 und 5. Zu 2: $(1,0)^T$. Zu 5: $(A-5E)v = 0$ ergibt $-3x + y = 0$, also $v = (1,3)^T$; Probe: $Av = (2+3,\ 15)^T = (5,15)^T = 5v$.
c) $\chi(\lambda) = \lambda^2 - 1$, Eigenwerte 1 und -1. Zu 1: $(1,1)^T$ (wird festgehalten); zu -1: $(1,-1)^T$ (wird gespiegelt).

Lösung zu Aufgabe 2

a) $\det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)(3-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10$.
b) $\lambda = \frac{7 \pm \sqrt{49-40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2}$, also $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 5$.
c) $\lambda = 2$: $2x + y = 0$, $v_1 = (1,-2)^T$. $\lambda = 5$: $-x + y = 0$, $v_2 = (1,1)^T$.
d) Spur $4 + 3 = 7 = 2 + 5$, Determinante $12 - 2 = 10 = 2 \cdot 5$.
Erläuterung: Die Eigenwerte sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\det(A - \lambda E)$. Zu jedem Eigenwert löst man das homogene System $(A - \lambda E)v = 0$; da die Matrix singulär ist, ist eine Zeile überflüssig und man kann eine Komponente frei wählen. Spur und Determinante liefern eine schnelle Kontrolle: Sie sind Summe und Produkt der Eigenwerte.

Lösung zu Aufgabe 3

a) $Au = (3,3)^T = 3u$: Eigenvektor zum Eigenwert 3.
b) $Av = (1,-1)^T = 1 \cdot v$: Eigenvektor zum Eigenwert 1.
c) $Aw = (4,5)^T$ ist kein Vielfaches von w: kein Eigenvektor.
d) Vielfache von Eigenvektoren sind wieder Eigenvektoren zum selben Eigenwert ($A(2u) = 6u = 3 \cdot 2u$); nur der Nullvektor ist ausgeschlossen.
Erläuterung: Ein Vektor ist Eigenvektor, wenn Av ein Vielfaches von v ist; der Faktor ist der Eigenwert.

Lösung zu Aufgabe 4

a) $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$: $\lambda = 3$ (Eigenvektor $(1,1)^T$) und $\lambda = -1$ (Eigenvektor $(1,-1)^T$). Zwei verschiedene Eigenwerte: diagonalisierbar.
b) $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$: $\lambda = 2$ doppelt. $B - 2E = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ hat Rang 1, der Eigenraum ist eindimensional: nicht diagonalisierbar.

c) $\lambda^2 + 1 = 0$ hat keine reelle Lösung. Keine reellen Eigenwerte: Keine Richtung bleibt bei einer Drehung um 90° erhalten. Über $\mathbb{C}$ wären $\pm i$ Eigenwerte.

Lösung zu Aufgabe 5

a) $\operatorname{tr} A = 2 + (-3) = -1$ und $\det A = 2 \cdot (-3) = -6$.
b) Da 0 kein Eigenwert ist, ist A invertierbar. A^{-1} hat die Eigenwerte $\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{3}$.
c) Für $Av = \lambda v$ gilt $(A^2 - 3A)v = (\lambda^2 - 3\lambda)v$: $2^2 - 6 = -2$ und $9 + 9 = 18$.
d) Dieselben 2 und -3, denn $\det(A^T - \lambda E) = \det((A - \lambda E)^T) = \det(A - \lambda E)$.
Erläuterung: Alle Folgerungen beruhen auf $Av = \lambda v$: Wendet man darauf A^{-1} oder ein Polynom in A an, wird λ entsprechend ersetzt.

Lösung zu Aufgabe 6

a) Obere Dreiecksmatrix: Eigenwerte 2 (algebraische Vielfachheit 2) und -1 (Vielfachheit 1).
b) Das charakteristische Polynom ist $(2 - \lambda)(\lambda - 1)(\lambda - 11)$: Eigenwerte $1, 2, 11$, je einfach. Kontrolle: Spur 14.
c) Nur der Eigenwert 1, algebraische Vielfachheit 3. Da jeder Vektor Eigenvektor ist, ist die geometrische Vielfachheit ebenfalls 3.

Lösung zu Aufgabe 7

a) $A - 2E$ hat die Zeilen $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 4)$, $(0, 4, 7)$. Aus $y + 4z = 0$ und $4y + 7z = 0$ folgt $y = z = 0$, x beliebig: $v = (1, 0, 0)^T$.

b) : $x = 0$, $2y + 4z = 0$, also $v = (0, -2, 1)^T$.

c) : $x = 0$, $-8y + 4z = 0$, also $v = (0, 1, 2)^T$.

d) Skalarprodukte: $(1, 0, 0) \cdot (0, -2, 1) = 0$, $(1, 0, 0) \cdot (0, 1, 2) = 0$,
$(0, -2, 1) \cdot (0, 1, 2) = -2 + 2 = 0$. A ist symmetrisch, und nach dem Spektralsatz stehen Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten senkrecht aufeinander.

Lösung zu Aufgabe 8

a) $\det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1$; $\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, also $\varphi \approx 1{,}618$ und $\psi \approx -0{,}618$.
b) Summe $= 1 = \operatorname{tr} A$, Produkt $= \frac{1-5}{4} = -1 = \det A$.
c) $\varphi^{10} \approx 122{,}992$, $\psi^{10} \approx 0{,}00813$, Differenz geteilt durch $\sqrt{5} \approx 2{,}236$: $F_{10} = 55$.
d) Wegen $|\psi|$ dominiert φ^n. Daher $\frac{F_{n+1}}{F_n} \to \varphi \approx 1{,}618$ (goldener Schnitt).
Erläuterung: Die Matrixschreibweise verwandelt eine Rekursion in Potenzen einer Matrix. Diagonalisiert man die Matrix, erhält man eine geschlossene Formel, in der die Eigenwerte als Basen der Potenzen auftreten. Der größere Eigenwert, der goldene

Schnitt, bestimmt das langfristige Wachstum der Folge.

Lösung zu Aufgabe 9

a) Spaltensummen $0{,}8+0{,}2=1$ und $0{,}4+0{,}6=1$. Spur $1{,}4$, Determinante $0{,}48-0{,}08=0{,}4$; $\lambda^2-1{,}4\lambda+0{,}4=0$ liefert $\lambda=1$ und $\lambda=0{,}4$.
b) $(P-E)v=0$: $-0{,}2s+0{,}4r=0$, also $s=2r$; mit $s+r=1$ folgt $x^*=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)^T$.
c) $x_1=Px_0=(0{,}8;0{,}2)^T$. $x_2=Px_1=(0{,}64+0{,}08;\ 0{,}16+0{,}12)^T=(0{,}72;0{,}28)^T$.
d) $\frac{2}{3}\cdot 365\approx 243$ sonnige Tage. Der Eigenwert $0{,}4$ zeigt, dass sich die Abweichung vom Gleichgewicht pro Tag um den Faktor $0{,}4$ verkleinert.

Lösung zu Aufgabe 10

a) $\lambda^2-4\lambda+3=0$: $\lambda_1=3$ mit $(1,1)^T$, $\lambda_2=1$ mit $(1,-1)^T$.
b) Die Halbachsen sind 3 in Richtung $(1,1)$ und 1 in Richtung $(1,-1)$. Der Kreis wird nur entlang der Diagonalen gestreckt.
c) Fläche vorher π, nachher $\pi\cdot 3\cdot 1=3\pi$: Faktor $3=\det A=4-1$.
d) $(1,0)\mapsto(2,1)$. Zerlegung $(1,0)=\frac{1}{2}(1,1)+\frac{1}{2}(1,-1)$: Die Diagonalkomponente wird verdreifacht, die andere bleibt: $\frac{3}{2}(1,1)+\frac{1}{2}(1,-1)=(2,1)$.

Lösung zu Aufgabe 11

a) $P=\begin{pmatrix}1&1\\-2&1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}2&0\\0&5\end{pmatrix}$.
b) $\det P=1+2=3$, $P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\end{pmatrix}$.
c) $AP=\begin{pmatrix}2&5\\-4&5\end{pmatrix}$ und $PD=\begin{pmatrix}2&5\\-4&5\end{pmatrix}$. Gleich.
d) $D^5=\operatorname{diag}(32,3125)$. $PD^5=\begin{pmatrix}32&3125\\-64&3125\end{pmatrix}$. Mal P^{-1}:
$A^5=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}32+6250&-32+3125\\-64+6250&64+3125\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2094&1031\\2062&1063\end{pmatrix}$.
Erläuterung: In P stehen die Eigenvektoren als Spalten, in D die zugehörigen Eigenwerte in derselben Reihenfolge. Dann gilt $A=PDP^{-1}$, und Potenzen von A berechnet man über $A^n=PD^nP^{-1}$. Die Probe $AP=PD$ ist leichter als die Berechnung von $P^{-1}AP$ und deckt Vertauschungsfehler auf.

Lösung zu Aufgabe 12

a) $\det P=2$, $P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$.
b) $PD^n=\begin{pmatrix}(-1)^n&3^n\\-(-1)^n&3^n\end{pmatrix}$. Mal P^{-1}: $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}(-1)^n+3^n&-(-1)^n+3^n\\-(-1)^n+3^n&(-1)^n+3^n\end{pmatrix}$. $\square$

c) $3^{10} = 59\,049$, also $A^{10} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 59\,050 & 59\,048 \\ 59\,048 & 59\,050 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29\,525 & 29\,524 \\ 29\,524 & 29\,525 \end{pmatrix}$.
d) Für große n dominiert 3^n: $A^n \approx \frac{3^n}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Alle Vektoren richten sich nach $(1,1)^T$ aus, dem dominanten Eigenvektor.
Erläuterung: Für große n dominiert der Eigenwert mit dem größten Betrag; hier wächst A^n wie 3^n.

Lösung zu Aufgabe 13

a) Blockstruktur: $\det(S - \lambda E) = (3-\lambda)\big[(2-\lambda)^2 - 1\big] = (3-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-3)$. Eigenwerte 1 (einfach), 3 (doppelt).

b) hat Rang 1, der Kern ist zweidimensional: Basis $(1,1,0)^T$ und $(0,0,1)^T$.
c) Zu $\lambda = 1$: $(1,-1,0)^T$. Normiert: $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$, $(0,0,1)$. Alle paarweise senkrecht.
d) Geometrische Vielfachheit 2 = algebraische Vielfachheit 2; allgemein garantiert der Spektralsatz die Diagonalisierbarkeit symmetrischer Matrizen.

Lösung zu Aufgabe 14

a) Aus $x = v\cos(\omega t)$ folgt $\ddot{x} = -\omega^2 v\cos(\omega t)$. Einsetzen in $\ddot{x} = -Kx$ ergibt $\omega^2 v = Kv$.
b) Spur 4, Determinante 3: $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$, $\lambda = 1$ mit $v = (1,1)^T$ und $\lambda = 3$ mit $v = (1,-1)^T$.
c) $\omega_1 = \sqrt{1} = 1\,\mathrm{s}^{-1}$ und $\omega_2 = \sqrt{3} \approx 1{,}732\,\mathrm{s}^{-1}$.
d) Zu $\omega_1 = 1$: $v = (1,1)$, beide Massen schwingen gleichphasig, die Kopplungsfeder bleibt entspannt. Zu $\omega_2 = \sqrt{3}$: $v = (1,-1)$, die Massen schwingen gegenphasig, die Kopplungsfeder wird besonders beansprucht.

Lösung zu Aufgabe 15

a) $\chi(\lambda) = (2-\lambda)^2 - t^2$, also $\lambda = 2 \pm t$.
b) $\det A_t = (2+t)(2-t) = 4 - t^2 \neq 0$ genau für $t \neq \pm 2$.
c) $2 - t > 0$ und $2 + t > 0$ genau für -2.
d) Zu $2+t$: $(A_t - (2+t)E)v = 0$ ergibt $-tv_1 + tv_2 = 0$, also $v = (1,1)^T$ für $t \neq 0$; zu $2-t$: $v = (1,-1)^T$. Für $t = 0$ ist jeder Vektor Eigenvektor.
Erläuterung: Bei symmetrischen Matrizen sind alle Eigenwerte reell, und Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten stehen senkrecht.

Lösung zu Aufgabe 16

a) Spaltensummen: $0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, $0 + 0 + 1 = 1$, $1 + 0 + 0 = 1$.

b) Aus der ersten Zeile $x_3 = x_1$, aus der zweiten $x_2 = \frac{1}{2}x_1$, aus der dritten $\frac{1}{2}x_1 + x_2 = x_3$ ✓. Mit $x = (1, \frac{1}{2}, 1)$ und Summe $2{,}5$: $x^* = (0{,}4; 0{,}2; 0{,}4)$.
c) Die Seiten 1 und 3 sind gleich wichtig (je $40\,\%$), Seite 2 weniger ($20\,\%$): Seite 3 erhält alle Links von 2 und die Hälfte von 1 und gibt alles an 1 weiter.
d) Seite 1: $400\,000$, Seite 2: $200\,000$, Seite 3: $400\,000$ Besuche.

Lösung zu Aufgabe 17

a) Für $x = e^{3t}v$ mit $Av = 3v$ gilt $x' = 3e^{3t}v = Ax$; entsprechend für $e^{-t}v$ mit $Av = -v$.
b) $c_1 + c_2 = 3$ und $c_1 - c_2 = 1$: $c_1 = 2$, $c_2 = 1$.
c) $x(1) = 2e^3(1,1)^T + e^{-1}(1,-1)^T \approx (2 \cdot 20{,}09 + 0{,}368;\ 2 \cdot 20{,}09 - 0{,}368)^T$, das sind etwa $(40{,}5;\ 39{,}8)$ Liter.
d) Der Term mit e^{3t} wächst exponentiell, der mit e^{-t} klingt ab. Nach kurzer Zeit liegt der Zustand praktisch auf der Geraden $x_1 = x_2$ (Richtung des dominanten Eigenvektors), und beide Mengen wachsen gemeinsam. Das Modell beschreibt keinen Ausgleich, sondern Wachstum, weil die Spalten von A nicht summenerhaltend sind.

Lösung zu Aufgabe 18

a) Induktion: $A^{k+1}v = A(\lambda^k v) = \lambda^k \lambda v = \lambda^{k+1}v$. □
b) $\lambda v = Av = A^2 v = \lambda^2 v$ mit $v \neq 0$ liefert $\lambda^2 = \lambda$, also $\lambda \in \{0, 1\}$. □
c) Seien $Av = \lambda v$, $Aw = \mu w$, $\lambda \neq \mu$, und $\alpha v + \beta w = 0$. Anwenden von A und Subtraktion von $\lambda \cdot (\ldots)$ ergibt $\beta(\mu - \lambda)w = 0$, also $\beta = 0$ und damit $\alpha = 0$. □
d) $\lambda \neq 0$, weil A invertierbar ist. Aus $Av = \lambda v$ folgt $v = \lambda A^{-1}v$, also $A^{-1}v = \frac{1}{\lambda}v$. □

Lösung zu Aufgabe 19

a) $\chi = (1-\lambda)^2$, Eigenwert 1 doppelt. $S - E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: $y = 0$, Eigenraum $\operatorname{span}\{(1,0)^T\}$, eindimensional.
b) Algebraische Vielfachheit 2, geometrische 1: Es gibt keine Basis aus Eigenvektoren.
c) $S^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: Induktionsanfang $n = 1$ klar; Schritt: $S^{n+1} = S^n S = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. □
Die Einträge wachsen linear, nicht exponentiell.
d) Bei E ist $E - E = 0$ und der Eigenraum ganz $\mathbb{R}^2$: geometrische Vielfachheit 2. Die Diagonalisierbarkeit hängt also nicht von der Mehrfachheit allein, sondern vom Eigenraum ab.

Lösung zu Aufgabe 20

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 18 & 7 \\ 14 & 11 \end{pmatrix}$, $7A = \begin{pmatrix} 28 & 7 \\ 14 & 21 \end{pmatrix}$, $10E$.
$A^2 - 7A + 10E = \begin{pmatrix} 18 - 28 + 10 & 0 \\ 0 & 11 - 21 + 10 \end{pmatrix} = 0$.
b) Aus $A^2 - 7A + 10E = 0$ folgt $A(7E - A) = 10E$, also

$A^{-1} = \frac{1}{10}(7E - A) = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

c)

$A^3 = A \cdot A^2 = 7A^2 - 10A = 7(7A - 10E) - 10A = 39A - 70E = \begin{pmatrix} 156 - 70 & 39 \\ 78 & 117 - 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 86 & 39 \\ 78 & 47 \end{pmatrix}$

.

d) Spur von A^{-1}: $\frac{3+4}{10} = 0{,}7 = \frac{1}{2} + \frac{1}{5}$; Determinante $\frac{12-2}{100} = 0{,}1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}$. ✓

Erläuterung: Der Satz von Cayley-Hamilton erlaubt es, hohe Potenzen einer Matrix auf niedrige zurückzuführen: Aus $A^2 = 7A - 10E$ folgt durch Multiplizieren mit A eine Formel für A^3 und so weiter. Ebenso erhält man die Inverse als Linearkombination von A und E, ohne das Gauß-Verfahren.