Lösungen zur Klassenarbeit - Differenzierbarkeit und Mittelwertsatz

Klasse: Studium 1 Semester · Dauer: 60 Minuten · /20

Lösung zu Aufgabe 1 (5 BE/Punkte)

a) Produkt- und Kettenregel: $f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = (2x - x^2)e^{-x}$ (2 P.).

b) Quotientenregel: $g'(x) = \frac{2x(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$ (2 P.).

c) $h(0) = 1$, $h'(0) = 2$: Tangente $y = 1 + 2x$ (1 P.).

In a) ist e^{-x} eine Verkettung, deren innere Ableitung -1 beträgt; danach klammert man e^{-x} aus, um Nullstellen der Ableitung bei 0 und 2 sofort zu sehen. In b) beachtet man die Reihenfolge „Nenner mal Ableitung des Zählers minus Zähler mal Ableitung des Nenners“. Die Tangente in c) folgt aus $y = h(0) + h'(0)x$ mit $h'(x) = 2e^{2x}$.

Lösung zu Aufgabe 2 (4 BE/Punkte)

a) Gleiche Ableitung: $a = 2 \cdot 2 = 4$. Stetigkeit: $4 = 2a + b = 8 + b$, also $b = -4$ (3 P.).

b) Die Funktion ist differenzierbar und damit stetig; direkt: $\lim_{x \to 2^+}(4x - 4) = 4 = f(2)$ (1 P.).

Damit die Funktion an der Nahtstelle differenzierbar ist, müssen zwei Bedingungen gelten: gleiche Funktionswerte und gleiche Steigungen von links und rechts. Die Steigung der Parabel bei 2 ist 4, daraus ergibt sich a; die Wertgleichheit liefert dann b. Die Gerade $y = 4x - 4$ ist genau die Tangente an die Parabel im Punkt $(2|4)$.

Lösung zu Aufgabe 3 (4 BE/Punkte)

a) Dritte Seite $40 - 2x$, $A(x) = x(40 - 2x) = 40x - 2x^2$, 0 (1 P.).

b) $A'(x) = 40 - 4x = 0$, $x = 10$; Seiten 10 m und 20 m, $A = 200\,\mathrm{m}^2$ (2 P.).

c) $A'' = -4$ (1 P.).

Die Länge der Einfassung legt die dritte Seite fest, sodass die Fläche nur noch von x abhängt. Der Definitionsbereich ergibt sich daraus, dass alle Seiten positiv sein müssen. Die Ableitung verschwindet bei $x = 10$, und die negative zweite Ableitung zeigt ein Maximum. Ergebnis: Die Seite an der Wand ist doppelt so lang wie die beiden anderen.

Lösung zu Aufgabe 4 (4 BE/Punkte)

a) Form $\frac{0}{0}$: $\frac{e^x}{2\cos 2x} \to \frac{1}{2}$ (2 P.).

b) Form $\frac{0}{0}$: $\frac{\sin x}{2x} \to \frac{\cos x}{2} \to \frac{1}{2}$ (2 P.).

Vor jeder Anwendung von L'Hospital ist die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ nachzuweisen, hier durch Einsetzen von $x = 0$. Bei b) liegt nach der ersten Anwendung erneut $\frac{0}{0}$ vor, deshalb leitet man ein zweites Mal ab. Kontrolle mit der Taylorentwicklung:

$1-\cos x \approx \frac{x^2}{2}$, also nähert sich der Quotient tatsächlich $\frac{1}{2}$.

Lösung zu Aufgabe 5 (3 BE/Punkte)

a) $\frac{3000}{80} = 37{,}5$ m/s $= 135$ km/h (1 P.).
b) Die Ortsfunktion ist differenzierbar; nach dem Mittelwertsatz gibt es einen Zeitpunkt mit $v = 135$ km/h > 120 km/h (2 P.).
Die Umrechnung von Metern pro Sekunde in Kilometer pro Stunde erfolgt mit dem Faktor $3{,}6$. Der Mittelwertsatz verlangt eine auf dem Intervall stetige und im Inneren differenzierbare Ortsfunktion, was für ein reales Fahrzeug erfüllt ist. Er garantiert einen Zeitpunkt, an dem die Momentangeschwindigkeit gleich der Durchschnittsgeschwindigkeit ist; damit ist die Überschreitung bewiesen, ohne den Zeitpunkt zu kennen.