Lernzettel - Differenzierbarkeit und Mittelwertsatz

Klasse: Studium 1 Semester

Einstieg: Der Blitzer auf der Autobahn

Auf einer Autobahn überwacht eine Abschnittskontrolle eine Strecke von 5 km. Ein Wagen passiert den Beginn um 10:00:00 Uhr und das Ende um 10:02:30 Uhr. Sein Tacho wurde nie gemessen – und doch lässt sich beweisen, dass er mindestens einmal genau 120 km/h schnell war. Der Grund ist der Mittelwertsatz: Die Durchschnittsgeschwindigkeit ist der Differenzenquotient, die Momentangeschwindigkeit ist die Ableitung, und eine differenzierbare Bewegung kann die Durchschnittsgeschwindigkeit nicht umgehen. In diesem Kapitel lernen Sie, die Ableitung präzise zu definieren, sicher zu berechnen und mit dem Mittelwertsatz Aussagen über Monotonie, Extrema und Grenzwerte zu beweisen.

Die Ableitung

Definition: Die Ableitung

Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt **differenzierbar in** a, wenn der Grenzwert des **Differenzenquotienten**

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Merke

existiert. Er heißt Ableitung und gibt die Steigung der Tangente an den Graphen in $(a, f(a))$ an; die Tangente hat die Gleichung $y = f(a) + f'(a)(x - a)$. Die Funktion ist differenzierbar, wenn sie in jedem Punkt von I differenzierbar ist. Es gilt: **Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit**, denn $f(a+h) - f(a) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \cdot h \to f'(a) \cdot 0 = 0$. Die Umkehrung ist falsch: $f(x) = |x|$ ist in 0 stetig, aber nicht differenzierbar (die einseitigen Ableitungen sind $+1$ und -1).

Ableitungsregeln

Definition: Ableitungsregeln

Für differenzierbare f, g gelten: **Summenregel** $(f+g)' = f' + g'$, **Produktregel** $(fg)' = f'g + fg'$, **Quotientenregel** $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ $(g \neq 0)$ und **Kettenregel**

$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))\, f'(x)$. Grundableitungen: $(x^n)' = n x^{n-1}$, $(e^x)' = e^x$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(a^x)' = a^x \ln a$. Für die **Umkehrfunktion** gilt: Ist f streng monoton und differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$, so ist $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$. So folgt etwa $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ und $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$. Potenzen mit variablem Exponenten differenziert man über $x^x = e^{x \ln x}$.

Satz von Rolle und Mittelwertsatz

Satz

Satz von Rolle: Ist f stetig auf $[a,b]$, differenzierbar auf (a,b) und $f(a) = f(b)$, so gibt es $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$. Beweisidee: Nach dem Extremwertsatz nimmt f Maximum und Minimum an; ist f nicht konstant, liegt eines davon im Inneren, und dort ist die Ableitung 0. **Mittelwertsatz:** Ist f stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b), so gibt es $\xi \in (a,b)$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Definition: Satz von Rolle und Mittelwertsatz

Geometrisch: Es gibt eine Tangente, die parallel zur Sekante durch $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ verläuft. **Folgerungen:** $f' \geq 0$ auf einem Intervall impliziert, dass f monoton wachsend ist ($f' > 0$: streng); $f' = 0$ impliziert f konstant. Eine differenzierbare Funktion mit $|f'| \leq L$ ist Lipschitz-stetig. Ein notwendiges Kriterium für ein lokales Extremum im Inneren ist $f'(x_0) = 0$; hinreichend ist ein Vorzeichenwechsel von f' in x_0.

Regel von L'Hospital

Definition: Regel von L'Hospital

Sind f, g differenzierbar, $\lim f = \lim g = 0$ (oder beide $\pm\infty$) und $g' \neq 0$ nahe der Stelle, dann gilt $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$, falls der rechte Grenzwert existiert. Man darf die Regel auch mehrfach anwenden. Andere unbestimmte Formen wie $0 \cdot \infty$ wandelt man vorher um: $x \ln x = \frac{\ln x}{1/x}$. Beispiel: $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim \frac{e^x - 1}{2x} = \lim \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$.

So gehst du vor: Ableiten und Extrema bestimmen

1. Passende Regel wählen (Produkt, Quotient, Kette).
2. Ableitung vereinfachen und $f'(x) = 0$ lösen.
3. Vorzeichen von f' links und rechts der Kandidaten prüfen.

4. Bei unbestimmten Grenzwerten $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ Zähler und Nenner getrennt ableiten (L'Hospital).

Beispiel 1 (Mittelwertsatz)

$f(x) = x^3$ auf $[0, 2]$: $\frac{f(2)-f(0)}{2} = 4 = 3\xi^2 \Rightarrow \xi = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1{,}155 \in (0, 2)$.

Beispiel 2 (Kettenregel)

$\frac{d}{dx} e^{-x^2} = e^{-x^2} \cdot (-2x) = -2xe^{-x^2}$.

Beispiel 3 (Monotonie)

$f(x) = x^3 - 3x$, $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$. Auf $(-\infty, -1)$ ist $f' > 0$, auf $(-1, 1)$ ist f', auf $(1, \infty)$ ist $f' > 0$. Lokales Maximum bei $x = -1$ mit $f(-1) = 2$, lokales Minimum bei $x = 1$ mit $f(1) = -2$.

Differenzierbarkeit als lineare Näherung

Die Ableitung $f'(a)$ ist die beste lineare Näherung einer Funktion nahe a. Äquivalent zur Definition über den Differenzenquotienten ist die Aussage $f(a+h) = f(a) + f'(a)\,h + r(h)$ mit einem Rest, für den $r(h)/h \to 0$ gilt. Die Tangente ersetzt also den Graphen in einer kleinen Umgebung durch eine Gerade; der Fehler wird dabei schneller klein als h selbst. Diese Sichtweise erklärt, warum Differenzierbarkeit Stetigkeit nach sich zieht, und sie lässt sich auf Funktionen mehrerer Veränderlicher übertragen. Die **einseitigen Ableitungen** $f'_-(a) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ und $f'_+(a)$ sind die Grenzwerte von links beziehungsweise rechts. Genau dann ist f in a differenzierbar, wenn beide existieren und übereinstimmen. Ein „Knick“ im Graphen bedeutet daher unterschiedliche einseitige Ableitungen, eine senkrechte Tangente bedeutet einen uneigentlichen Grenzwert.

Beispiel 4 (Anschlussstelle einer stückweisen Funktion)

Für welche a, b ist $f(x) = x^2$ für $x \le 1$ und $f(x) = ax + b$ für $x > 1$ in $x = 1$ differenzierbar?

Stetigkeit verlangt $1^2 = a + b$. Gleiche einseitige Ableitungen verlangen $2 \cdot 1 = a$. Aus $a = 2$ und $a + b = 1$ folgt $b = -1$. Die Funktion geht also glatt in die Tangente $y = 2x - 1$ an die Parabel über.

Kurvendiskussion und Extremwertaufgaben

Die Ableitung liefert ein vollständiges Werkzeug zur Untersuchung einer Funktion. Das Vorzeichen von f' gibt die Monotonie an, das Vorzeichen von f'' die Krümmung: Ist $f'' > 0$, liegt der Graph oberhalb seiner Tangenten (konvex), ist f'', unterhalb (konkav). Ein

Wendepunkt liegt vor, wo f'' das Vorzeichen wechselt. Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$, liegt ein lokales Minimum vor; bei $f''(x_0)$ ein lokales Maximum. Ist auch $f''(x_0) = 0$, entscheidet der Vorzeichenwechsel von f'. Globale Extrema einer stetigen Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall liegen entweder bei kritischen Punkten im Inneren oder an den Rändern, und man muss daher alle Kandidaten vergleichen.

So gehst du vor: Extremwertaufgabe

1. Größe festlegen, die extremal werden soll (Fläche, Volumen, Kosten, Gewinn), und Variable benennen.
2. Nebenbedingung aufstellen und damit die Zielfunktion auf eine einzige Variable zurückführen; Definitionsbereich notieren.
3. Zielfunktion ableiten, $f'(x) = 0$ lösen.
4. Art des Extremums mit f'' oder einem Vorzeichenwechsel prüfen, Randwerte vergleichen.
5. Ergebnis im Sachzusammenhang formulieren (mit Einheit).

Beispiel 5 (Rechteck mit festem Umfang)

Unter allen Rechtecken mit Umfang 40 cm soll das mit größtem Flächeninhalt gefunden werden.

Seien x und $20 - x$ die Seiten, 0. Die Zielfunktion ist $A(x) = x(20 - x) = 20x - x^2$. Aus $A'(x) = 20 - 2x = 0$ folgt $x = 10$, und $A''(x) = -2$ bestätigt ein Maximum. Das Rechteck ist ein Quadrat der Seitenlänge 10 cm mit $A = 100\,\mathrm{cm}^2$. Die Ränder $x \to 0$ und $x \to 20$ liefern $A \to 0$, sind also schlechter.

Der Mittelwertsatz als Beweiswerkzeug

Der Mittelwertsatz ist weniger ein Rechenverfahren als ein Beweiswerkzeug. Fast alle wichtigen Folgerungen der Differentialrechnung stützen sich auf ihn: Aus $f' = 0$ folgt, dass f konstant ist; aus $f' > 0$ folgt strenge Monotonie; aus $|f'| \le L$ folgt $|f(x) - f(y)| \le L|x - y|$, die Lipschitz-Bedingung. Mit ihr lassen sich Funktionswerte abschätzen, ohne sie auszurechnen. Wichtig ist, die Voraussetzungen zu prüfen: Stetigkeit auf dem abgeschlossenen Intervall, Differenzierbarkeit auf dem offenen. Die Funktion $f(x) = |x|$ auf $[-1, 1]$ ist stetig, aber nicht differenzierbar in 0; der Mittelwertsatz liefert hier keine Aussage, und tatsächlich ist die Steigung der Sekante 0, während f' nie den Wert 0 annimmt.

Beispiel 6 (Abschätzung mit dem Mittelwertsatz)

Zeigen Sie $\sqrt{101} - 10$.

Für $f(x) = \sqrt{x}$ liefert der Mittelwertsatz auf $[100, 101]$ ein $\xi \in (100, 101)$ mit $\sqrt{101} - \sqrt{100} = \frac{1}{2\sqrt{\xi}}$. Wegen $\xi > 100$ ist $\sqrt{\xi} > 10$ und damit $\frac{1}{2\sqrt{\xi}}$. Der exakte Wert ist $0{,}04988\ldots$.

Merke: Lipschitz-Bedingung und Stabilität

Ist $|f'(x)| \le L$ auf einem Intervall, so ändert sich der Funktionswert höchstens um das L-fache der Änderung des Arguments. Das bedeutet in Anwendungen: Kleine Messfehler in der Eingabe führen zu höchstens L-mal so großen Fehlern im Ergebnis. Eine Funktion mit kleiner Schranke L ist daher gutmütig, eine mit großer Schranke empfindlich. Genau diese Abschätzung wird später beim Beweis des Banachschen Fixpunktsatzes und bei der Fehleranalyse numerischer Verfahren gebraucht. Wer sie einmal verstanden hat, erkennt den Mittelwertsatz in vielen Gewändern wieder.

L'Hospital richtig anwenden

Die Regel von L'Hospital ist ein starkes, aber leicht missbrauchtes Werkzeug. Sie gilt nur für Ausdrücke der Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$; andere unbestimmte Formen müssen erst umgeformt werden. Aus $0 \cdot \infty$ wird durch Umschreiben ein Quotient, aus 1^∞, 0^0 und ∞^0 wird durch $u^v = e^{v \ln u}$ ein Produkt im Exponenten. Vor der Anwendung lohnt sich immer die Frage, ob nicht eine algebraische Umformung (Kürzen, Erweitern, Standardgrenzwert) schneller zum Ziel führt. Beachten Sie auch, dass die Regel nur in einer Richtung gilt: Existiert der Grenzwert der Ableitungen nicht, sagt das nichts über den ursprünglichen Grenzwert aus.

Beispiel 7 (Unbestimmte Form $0 \cdot \infty$)

Berechnen Sie $\lim_{x \to 0^+} x \ln x$.

Es gilt $x \ln x = \frac{\ln x}{1/x}$, eine Form $\frac{-\infty}{\infty}$. Ableiten von Zähler und Nenner liefert $\frac{1/x}{-1/x^2} = -x \to 0$. Also ist $\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$.

Warum der Mittelwertsatz gilt

Der Beweis des Mittelwertsatzes führt ihn auf den Satz von Rolle zurück, und dieser stützt sich auf den Extremwertsatz von Weierstraß. Man betrachtet die Hilfsfunktion $h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. Sie beschreibt den senkrechten Abstand des Graphen von der Sekante, ist stetig auf $[a,b]$, differenzierbar auf (a,b) und hat an beiden Rändern den Wert 0. Nach Rolle gibt es ein ξ mit $h'(\xi) = 0$, das heißt $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Die geometrische Idee ist einfach: Man verschiebt die Sekante parallel, bis sie den Graphen gerade noch berührt. An diesem Berührpunkt ist die Tangente parallel zur Sekante. Ein Beweis, der diese Idee sauber umsetzt, gehört zu den Standardaufgaben im ersten Semester.

Höhere Ableitungen und Krümmung

Ist f' selbst differenzierbar, erhält man die zweite Ableitung f'', die die Änderung der Steigung beschreibt. In der Physik ist s' die Geschwindigkeit und s'' die Beschleunigung. Geometrisch beschreibt f'' die Krümmung des Graphen: Bei $f'' > 0$ biegt sich der Graph nach oben (Linkskurve, konvex), bei f'' nach unten. Die Funktion f heißt **konvex**, wenn

die Sekante zwischen je zwei Punkten oberhalb des Graphen liegt. Für zweimal differenzierbare Funktionen ist das gleichbedeutend mit $f'' \geq 0$. Daraus ergeben sich nützliche Ungleichungen wie $e^x \geq 1 + x$: Die Exponentialfunktion ist konvex und liegt daher über ihrer Tangente im Punkt $x = 0$. Wer höhere Ableitungen berechnet, sollte nach jeder Stufe vereinfachen, sonst wachsen die Terme schnell an.

Beispiel 8 (Vollständige Kurvendiskussion)

Untersuchen Sie $f(x) = x\,e^{-x}$ auf Extrema und Wendepunkte.

Mit der Produktregel ist $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$. Da $e^{-x} > 0$, verschwindet f' nur bei $x = 1$. Für x ist $f' > 0$, für $x > 1$ ist f': Bei $x = 1$ liegt ein lokales Maximum mit $f(1) = \frac{1}{e} \approx 0{,}368$. Die zweite Ableitung ist $f''(x) = -e^{-x} - (1-x)e^{-x} = (x-2)e^{-x}$ und wechselt bei $x = 2$ das Vorzeichen: Wendepunkt $(2 | 2e^{-2})$. Für $x \to \infty$ strebt $f \to 0$ (nach L'Hospital), für $x \to -\infty$ strebt $f \to -\infty$.

Ableitung als Änderungsrate

In den Anwendungen liest man $f'(x)$ als momentane Änderungsrate: Geschwindigkeit als Ableitung des Wegs, Stromstärke als Ableitung der Ladung, Wachstumsgeschwindigkeit einer Bakterienkultur als Ableitung der Populationsgröße, Grenzkosten als Ableitung der Kostenfunktion. Eine wichtige Größe ist die **relative Änderungsrate** $f'(x)/f(x)$, die angibt, wie viel Prozent der aktuellen Größe pro Zeiteinheit hinzukommen. Für Exponentialfunktionen $f(t) = Ae^{kt}$ ist sie konstant gleich k; das erklärt, warum exponentielles Wachstum durch die Gleichung $f' = kf$ beschrieben wird. Bei Sachaufgaben sollten Sie immer die Einheit der Ableitung angeben: Ist s in Metern und t in Sekunden gemessen, hat s' die Einheit Meter pro Sekunde.

Beispiel 9 (Differenzierbar, aber f' nicht stetig)

Zeigen Sie, dass $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ für $x \neq 0$ und $f(0) = 0$ in 0 differenzierbar ist.

Der Differenzenquotient ist $\frac{f(h)-f(0)}{h} = h \sin\frac{1}{h}$. Wegen $|\sin\frac{1}{h}| \leq 1$ gilt $|h \sin\frac{1}{h}| \leq |h| \to 0$. Also existiert $f'(0) = 0$. Für $x \neq 0$ ist dagegen $f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$, und dieser Ausdruck hat für $x \to 0$ keinen Grenzwert. Die Ableitung existiert also überall, ist aber in 0 nicht stetig. Das Beispiel zeigt, dass „differenzierbar“ und „stetig differenzierbar“ verschiedene Begriffe sind; die Begriffe unterscheidet man in der Analysis 2 sorgfältig.

Beispiel 10 (Näherung mit der Tangente)

Berechnen Sie $\sqrt{26}$ näherungsweise ohne Taschenrechner.

Mit $f(x) = \sqrt{x}$ und $a = 25$ ist $f(25) = 5$ und $f'(25) = \frac{1}{2 \cdot 5} = \frac{1}{10}$. Die Tangentennäherung liefert $\sqrt{26} \approx 5 + \frac{1}{10} \cdot 1 = 5{,}1$. Der exakte Wert ist $5{,}0990\ldots$; der Fehler beträgt nur etwa $0{,}001$. Weil f konkav ist, liegt die Tangente über dem Graphen, die Näherung ist also zu groß – eine Abschätzung nach oben, die der Mittelwertsatz bestätigt.

Beispiel 11 (Mehrfach verkettete Funktion)

Leiten Sie $f(x) = \ln\left(\sin^2(3x) + 1\right)$ ab.

Die äußerste Funktion ist der Logarithmus, darin steckt die Summe $u = \sin^2(3x) + 1$. Von außen nach innen: Zuerst $\frac{1}{u}$, dann die Ableitung von $\sin^2(3x)$ als Potenz, nämlich $2\sin(3x)$, und schließlich die Ableitung des Sinus $\cos(3x)$ mal die innere Ableitung 3. Das Ergebnis ist $f'(x) = \frac{2\sin(3x)\cdot\cos(3x)\cdot 3}{\sin^2(3x)+1} = \frac{3\sin(6x)}{\sin^2(3x)+1}$, wenn man $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$ verwendet. Die Probe bei $x = 0$ liefert $f'(0) = 0$, und tatsächlich hat f dort ein Minimum, da $\sin^2 \geq 0$.

Ableitungen in Naturwissenschaft und Technik

Ohne Differentialrechnung gäbe es keine Mechanik, keine Elektrotechnik und keine moderne Wirtschaftstheorie. Bewegungsgleichungen sind Gleichungen für Ableitungen, Optimierungsprobleme in der Logistik und im Maschinenbau werden mit Ableitungen gelöst, und Lernverfahren der künstlichen Intelligenz beruhen darauf, dass man die Steigung einer Fehlerfunktion berechnen und in Richtung des stärksten Abfalls gehen kann. Der Computer kann Ableitungen näherungsweise durch Differenzenquotienten bestimmen, doch bei zu kleinem h entstehen Rundungsfehler, bei zu großem h ein Verfahrensfehler. Wer die Ableitung exakt kennt, vermeidet beides. Deshalb lohnt es sich, die Regeln dieses Kapitels sicher zu beherrschen.

Hinweis: So lernen Sie Differentialrechnung für die Klausur

Üben Sie die Standardableitungen so lange, bis sie automatisch kommen, denn in Klausuren kostet jedes Nachschlagen Zeit. Üben Sie danach das Zerlegen verketteter Funktionen in äußere und innere Funktion und das Anwenden der Kettenregel von außen nach innen. Bei jedem Beweis mit dem Mittelwertsatz sollten Sie zuerst die Voraussetzungen explizit notieren und danach die Funktion und das Intervall benennen. Üben Sie außerdem, die Aussagen des Kapitels in eigenen Worten zu erklären – „Warum folgt aus $f' > 0$ die Monotonie?“ ist eine typische Frage in der mündlichen Prüfung. Und schließlich: Kontrollieren Sie jede Ableitung durch Einsetzen eines Zahlenwertes in den Differenzenquotienten.

Achtung: Typische Fehler beim Differenzieren

Häufig wird bei Produkten einfach faktorweise abgeleitet, also $(fg)' = f'g'$ gerechnet; richtig ist die Produktregel. Bei verketteten Funktionen wird die innere Ableitung vergessen: $(\sin 3x)' = 3\cos 3x$, nicht $\cos 3x$. Bei x^x darf man weder die Potenzregel nx^{n-1} noch die Regel für Exponentialfunktionen verwenden. Beim Mittelwertsatz wird oft die Voraussetzung vergessen, dass die Funktion auf dem *abgeschlossenen* Intervall stetig sein muss. Bei Extremwertaufgaben vergessen Studierende, den Definitionsbereich zu notieren und die Randwerte zu vergleichen.

Wusstest du? Fermat, Newton und der Marquis

Pierre de Fermat beschrieb schon um 1636 ein Verfahren, Maxima und Minima zu finden, indem er die Steigung einer Kurve an extremalen Stellen gleich null setzte. Newton und Leibniz entwickelten daraus im späten 17. Jahrhundert die Differentialrechnung. Die Regel von L'Hospital ist nach dem Marquis de L'Hospital benannt, der sie 1696 in seinem Lehrbuch veröffentlichte – sie stammt jedoch von seinem Lehrer Johann Bernoulli, der für sein Wissen bezahlt wurde.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Die Ableitung $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ ist die Tangentensteigung und die beste lineare Näherung; differenzierbar heißt: einseitige Ableitungen existieren und sind gleich.
- Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit, die Umkehrung ist falsch (Betragsfunktion in 0).
- Summen-, Produkt-, Quotienten- und Kettenregel sowie die Umkehrregel $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$ liefern alle Standardableitungen, auch von x^x über $e^{x \ln x}$.
- Satz von Rolle und Mittelwertsatz: Zwischen zwei Punkten gibt es eine Stelle ξ mit $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$; Voraussetzungen: stetig auf $[a,b]$, differenzierbar auf (a,b).
- Folgerungen: $f' = 0 \Rightarrow$ konstant, $f' > 0 \Rightarrow$ streng monoton wachsend, $|f'| \leq L \Rightarrow$ Lipschitz-stetig; Abschätzungen ohne Rechnung sind möglich.
- Extremwerte: $f'(x_0) = 0$ ist notwendig, $f''(x_0) \neq 0$ oder ein Vorzeichenwechsel von f' hinreichend; bei Extremwertaufgaben Nebenbedingung einsetzen und Randwerte vergleichen.
- L'Hospital gilt nur für $\frac{0}{0}$ und $\frac{\infty}{\infty}$ mit getrenntem Ableiten von Zähler und Nenner; andere unbestimmte Formen erst durch $u^v = e^{v \ln u}$ oder Bruchschreibweise umformen.

Achtung

Typische Fehler: Bei L'Hospital Zähler und Nenner als Bruch ableiten (Quotientenregel), statt getrennt; die Regel anwenden, obwohl keine unbestimmte Form vorliegt; beim Mittelwertsatz die Differenzierbarkeit im Inneren oder die Stetigkeit am Rand nicht prüfen. Auch gilt: $f'(x_0) = 0$ ist nicht hinreichend für ein Extremum (x^3).

Ottos Tipp

Prüfen Sie bei jedem Ableiten, welche Regel passt: Verkettung $\Rightarrow$ Kettenregel, Produkt $\Rightarrow$ Produktregel. Bei Grenzwerten zuerst algebraisch vereinfachen, danach L'Hospital.