Arbeitsblatt - Differenzierbarkeit und Mittelwertsatz

Klasse: Studium 1 Semester · 20

Der Rechenweg muss angegeben werden.

Aufgabe 1

Aufgabe 1 – Ableitung aus der Definition

Bestimmen Sie die Ableitung an der angegebenen Stelle als Grenzwert des Differenzenquotienten. Vereinfachen Sie den Quotienten vor dem Grenzübergang.

a) $f(x) = x^2$ an der Stelle $a = 3$
b) $f(x) = \frac{1}{x}$ an der Stelle $a = 2$
c) $f(x) = \sqrt{x}$ an der Stelle $a = 4$

Aufgabe 2

Aufgabe 2 – Ableitungsregeln

Leiten Sie ab und vereinfachen Sie so weit wie möglich. Nennen Sie jeweils die verwendete Regel.

a) $f(x) = x^3 \sin x$
b) $g(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x - 1}$
c) $h(x) = e^{-3x} \cos 2x$
d) $k(x) = \ln(x^2 + 1)$

Aufgabe 3

Aufgabe 3 – Tangente und Normale

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente und, wenn verlangt, der Normalen im angegebenen Punkt. Die Normale steht senkrecht auf der Tangente (Steigungsprodukt -1).

a) $f(x) = x^2 - 4x + 5$ an der Stelle $x_0 = 3$: Tangente und Normale
b) $f(x) = \ln x$ an der Stelle $x_0 = e$: Tangente
c) In welchem Punkt schneidet die Tangente aus a) die x-Achse?

Aufgabe 4

Aufgabe 4 – Differenzierbar oder nicht?

Untersuchen Sie mit einseitigen Ableitungen, ob f an der Stelle a differenzierbar ist.

a) $f(x) = |x-2|$, $a = 2$
b) $f(x) = x|x|$, $a = 0$
c) $f(x) = x^2$ für $x \leq 1$ und $f(x) = 2x - 1$ für $x > 1$, $a = 1$
d) $f(x) = \sqrt{|x|}$, $a = 0$

Aufgabe 5

Aufgabe 5 – Umkehrregel anwenden

Berechnen Sie mit der Ableitung der Umkehrfunktion $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

a) Ableitung von $\arctan$ aus $\tan$ (verwenden Sie $\tan' = 1 + \tan^2$)
b) $f(x) = x^3 + x$: Berechnen Sie $(f^{-1})'(2)$, wenn Sie wissen, dass $f(1) = 2$ gilt.
c) Ableitung von $\sqrt[3]{x}$ als Umkehrfunktion von x^3 an der Stelle 8

Aufgabe 6

Aufgabe 6 – Logarithmisches Differenzieren

Bestimmen Sie die Ableitungen, indem Sie $u^v = e^{v \ln u}$ verwenden.

a) $f(x) = x^x$ und $f'(2)$
b) $g(x) = x^{\sin x}$ und $g'\left(\frac{\pi}{2}\right)$
c) $h(x) = 2^x$ und $h'(3)$

Aufgabe 7

Aufgabe 7 – Die Straßenbahn

Eine Straßenbahn fährt zwischen zwei Haltestellen. Ihr zurückgelegter Weg (in Metern) nach t Sekunden ist $s(t) = -\frac{t^3}{6} + 3t^2$ für $0 \leq t \leq 12$.

a) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit $v(t) = s'(t)$ und die Beschleunigung $a(t) = v'(t)$.
b) Welche Geschwindigkeit hat die Bahn nach 2 s? Geben Sie auch km/h an.
c) Zu welchem Zeitpunkt ist die Geschwindigkeit am größten, und wie groß ist sie?
d) Zeigen Sie, dass die Bahn bei $t = 12$ steht, und berechnen Sie den Abstand der Haltestellen.
e) Die mittlere Geschwindigkeit beträgt 12 m/s. Zu welchen Zeitpunkten ist die Momentangeschwindigkeit genau so groß?

Aufgabe 8

Aufgabe 8 – Fehler bei der Pizza

Eine Pizzeria bäckt runde Pizzen mit dem Radius $r = 15$ cm, der aber um bis zu $0{,}5$ cm schwankt. Die Fläche ist $A(r) = \pi r^2$.

a) Berechnen Sie die Ableitung $A'(r)$ und deuten Sie sie geometrisch.
b) Schätzen Sie die Flächenschwankung mit dem Differential $\Delta A \approx A'(r)\,\Delta r$ ab.

c) Berechnen Sie den exakten Flächenunterschied zwischen $r = 15{,}5$ und $r = 15$.
d) Wie groß ist die relative Abweichung der Fläche in Prozent im Vergleich zur relativen Abweichung des Radius?

Aufgabe 9

Aufgabe 9 – Die günstigste Getränkedose

Eine zylindrische Dose soll $500\,\text{cm}^3$ fassen und möglichst wenig Blech verbrauchen. Radius r und Höhe h sind in Zentimetern gemessen.

a) Stellen Sie die Nebenbedingung $\pi r^2 h = 500$ auf und drücken Sie h durch r aus.
b) Zeigen Sie, dass die Oberfläche $O(r) = 2\pi r^2 + \frac{1000}{r}$ beträgt.
c) Bestimmen Sie r mit $O'(r) = 0$ und zeigen Sie $h = 2r$.
d) Berechnen Sie Radius, Höhe und Oberfläche numerisch und begründen Sie, dass es ein Minimum ist.

Aufgabe 10

Aufgabe 10 – Das Gehege an der Mauer

Ein Landwirt hat 200 m Zaun und will damit ein rechteckiges Gehege für seine Schafe an einer langen Steinmauer anlegen. An der Mauer wird kein Zaun benötigt. Die beiden Seiten senkrecht zur Mauer sind je x Meter lang.

a) Wie lang ist die dritte Seite? Stellen Sie die Fläche $A(x)$ auf und geben Sie den Definitionsbereich an.
b) Füllen Sie eine kleine Tabelle für $x = 40, 50, 60$ aus.
c) Bestimmen Sie das Maximum mit der Ableitung.
d) Wie viele Schafe haben Platz, wenn jedes Tier $10\,\text{m}^2$ benötigt?

Aufgabe 11

Aufgabe 11 – Kurvendiskussion

Untersuchen Sie $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$.

a) Bestimmen Sie f' und f''.
b) Finden Sie die Extremstellen und klassifizieren Sie sie mit f''.
c) Bestimmen Sie die Monotoniebereiche und den Wendepunkt.
d) Wie viele Nullstellen hat f mindestens? Argumentieren Sie mit dem Zwischenwertsatz und $f(0)$, $f(-2)$, $f(5)$.

Aufgabe 12

Aufgabe 12 – Rolle und Mittelwertsatz

Wenden Sie die Sätze auf konkrete Funktionen an und prüfen Sie jeweils die Voraussetzungen.

a) Bestimmen Sie für $f(x) = \ln x$ auf $[1, e]$ die Stelle ξ aus dem Mittelwertsatz.

b) Zeigen Sie, dass $g(x) = x^3 - 3x + 1$ im Intervall $[1, 2]$ genau eine Nullstelle hat.
c) Warum liefert der Mittelwertsatz für $f(x) = |x|$ auf $[-1, 2]$ keine Aussage?

Aufgabe 13

Aufgabe 13 – Ungleichungen mit dem Mittelwertsatz

Beweisen Sie mit dem Mittelwertsatz.

a) Für alle reellen a, b gilt $|\sin a - \sin b| \leq |a - b|$.
b) Für $x > 0$ gilt $e^x \geq 1 + x$.
c) Für $x > 0$ gilt $\ln(1 + x) \leq x$.
d) Zeigen Sie $\sqrt{101} - 10$.

Aufgabe 14

Aufgabe 14 – Der Kaffee kühlt ab

Die Temperatur einer Tasse Kaffee (in °C) beträgt nach t Minuten $T(t) = 20 + 60e^{-0{,}1t}$. Die Raumtemperatur ist 20 °C.

a) Wie warm ist der Kaffee zu Beginn und nach 5 Minuten?
b) Berechnen Sie die Abkühlungsrate $T'(t)$ und deren Wert bei $t = 0$.
c) Wann hat der Kaffee 40 °C erreicht?
d) Welche Abkühlungsrate hat er dann, und welcher Zusammenhang besteht zu $T - 20$?

Aufgabe 15

Aufgabe 15 – Die Skate-Rampe

Ein Skatepark-Planer entwirft eine Rampe: Bis $x = 1$ (in Metern) verläuft sie geradlinig als $f(x) = 2x$, danach als Parabel $g(x) = ax^2 + bx + c$. Die Rampe soll ohne Knick anschließen, und die Parabel soll bei $x = 3$ die Höhe 8 m erreichen.

a) Stellen Sie die drei Bedingungen für a, b, c auf.
b) Lösen Sie das Gleichungssystem.
c) Prüfen Sie, dass f in $x = 1$ differenzierbar ist.
d) Zeigen Sie, dass f'' in $x = 1$ springt. Warum spürt man das als Fahrer?

Aufgabe 16

Aufgabe 16 – Abschnittskontrolle

Auf einer Landstraße gilt Tempo 100. Eine Abschnittskontrolle misst, dass ein Fahrzeug die 5 km lange Strecke in 150 s zurücklegt.

a) Berechnen Sie die Durchschnittsgeschwindigkeit in m/s und km/h.
b) Begründen Sie mit dem Mittelwertsatz, dass das Fahrzeug zu einem Zeitpunkt exakt so schnell wie der Durchschnitt war. Welche Voraussetzung wird für die

Bewegungsfunktion $s(t)$ gemacht?
c) Ein zweites Fahrzeug braucht 180 s. Folgt daraus, dass es nie schneller als 100 km/h war?
d) Eine Funktion f erfüllt $f(0) = 2$ und $f'(x) \leq 3$ für alle x. Zeigen Sie $f(4) \leq 14$.

Aufgabe 17

Aufgabe 17 – Der beste Verkaufspreis

Ein Online-Shop verkauft Fahrradhelme. Bei einem Preis von p Euro werden $q(p) = 1000 - 20p$ Stück pro Monat verkauft. Ein Helm kostet in der Herstellung 5 €, die Fixkosten betragen 2000 € pro Monat.

a) Stellen Sie die Gewinnfunktion $G(p) = (p - 5)\,q(p) - 2000$ auf.
b) Berechnen Sie G für $p = 20$, 25 und 30 in einer Tabelle.
c) Bestimmen Sie den gewinnmaximalen Preis mit der Ableitung.
d) Wie groß sind Absatz und Gewinn dort, und für welche Preise macht der Shop überhaupt Gewinn?

Aufgabe 18

Aufgabe 18 – Newton-Verfahren für die Wurzel aus zwei

Das Newton-Verfahren nähert Nullstellen von f durch Tangenten an: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Für $f(x) = x^2 - 2$ und den Startwert $x_0 = 1{,}5$ soll $\sqrt{2}$ berechnet werden.

a) Zeigen Sie, dass hier $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$ gilt.
b) Berechnen Sie x_1, x_2, x_3.
c) Vergleichen Sie mit $\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots$ und beschreiben Sie, wie sich die Anzahl der richtigen Stellen entwickelt.
d) Warum würde der Startwert $x_0 = 0$ scheitern?

Aufgabe 19

Aufgabe 19 – Beweise zur Monotonie

Beweisen Sie mit dem Mittelwertsatz oder der Definition.

a) Gilt $f'(x) = 0$ für alle x in einem Intervall I, so ist f auf I konstant.
b) Erfüllt f die Gleichung $f' = f$ und $f(0) = 1$, so ist $f(x) = e^x$. (Betrachten Sie $g(x) = f(x)e^{-x}$.)
c) Ist $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$, so ist f injektiv.
d) Ist f in a differenzierbar, so ist f in a stetig.

Aufgabe 20

Aufgabe 20 – Grenzwerte mit L'Hospital

Berechnen Sie die Grenzwerte. Weisen Sie jeweils nach, dass eine unbestimmte Form vorliegt, und formen Sie bei Bedarf um.

a) $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$
b) $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$
c) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$
d) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x}$