Lösungen - Differenzierbarkeit und Mittelwertsatz

Klasse: Studium 1 Semester

Lösung zu Aufgabe 1

a) $\frac{(3+h)^2-9}{h} = \frac{6h+h^2}{h} = 6+h \to 6$, also $f'(3) = 6$.

b) $\frac{\frac{1}{2+h}-\frac{1}{2}}{h} = \frac{2-(2+h)}{2(2+h)h} = \frac{-1}{2(2+h)} \to -\frac{1}{4}$, also $f'(2) = -\frac{1}{4}$.

c) Erweitern mit $\sqrt{4+h}+2$: $\frac{\sqrt{4+h}-2}{h} = \frac{4+h-4}{h(\sqrt{4+h}+2)} = \frac{1}{\sqrt{4+h}+2} \to \frac{1}{4}$.

Erläuterung: Der Differenzenquotient $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ ist die Steigung der Sekante durch zwei nahe Punkte. Setzt man direkt $h=0$ ein, erhält man $\frac{0}{0}$. Deshalb vereinfacht man zuerst: Bei Polynomen ausmultiplizieren, bei Brüchen auf einen Hauptnenner bringen, bei Wurzeln mit der Summe erweitern. Danach lässt sich h kürzen und der Grenzübergang ist problemlos.

Lösung zu Aufgabe 2

a) Produktregel: $f'(x) = 3x^2\sin x + x^3\cos x$.

b) Quotientenregel: $g'(x) = \frac{2x(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$.

c) Produkt- und Kettenregel:
$h'(x) = -3e^{-3x}\cos 2x - 2e^{-3x}\sin 2x = -e^{-3x}(3\cos 2x + 2\sin 2x)$.

d) Kettenregel: $k'(x) = \frac{1}{x^2+1}\cdot 2x = \frac{2x}{x^2+1}$.

Erläuterung: Vor dem Ableiten bestimmt man die Bauart des Terms: Ein Produkt verlangt die Produktregel, ein Bruch die Quotientenregel, eine verschachtelte Funktion die Kettenregel. Bei zusammengesetzten Termen wendet man die Regeln von außen nach innen an. Anschließend fasst man zusammen und klammert gemeinsame Faktoren wie e^{-3x} aus, damit Nullstellen der Ableitung sichtbar werden.

Lösung zu Aufgabe 3

a) $f(3) = 2$, $f'(x) = 2x-4$, $f'(3) = 2$. Tangente: $y = 2+2(x-3) = 2x-4$. Normale mit Steigung $-\frac{1}{2}$: $y = 2-\frac{1}{2}(x-3) = -\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$.
b) $f(e) = 1$, $f'(e) = \frac{1}{e}$. Tangente: $y = 1+\frac{1}{e}(x-e) = \frac{x}{e}$. Sie verläuft durch den Ursprung.
c) $2x-4=0$ ergibt $x=2$, der Schnittpunkt ist $(2|0)$.

Erläuterung: Die Tangente hat die Gleichung $y = f(a)+f'(a)(x-a)$; die Normale steht senkrecht darauf und hat die Steigung $-\frac{1}{f'(a)}$.

Lösung zu Aufgabe 4

a) Linksseitig -1, rechtsseitig $+1$: nicht differenzierbar (Knick).
b) $\frac{h|h|}{h} = |h| \to 0$ von beiden Seiten: differenzierbar mit $f'(0) = 0$.
c) Stetig: $1 = 2 - 1$. Links $2x|_{x=1} = 2$, rechts 2: differenzierbar mit $f'(1) = 2$.
d) $\frac{\sqrt{|h|}}{h}$ strebt für $h \to 0^+$ gegen $+\infty$: nicht differenzierbar, senkrechte Tangente.

Erläuterung: Eine Funktion ist an einer Nahtstelle differenzierbar, wenn sie dort stetig ist und links- und rechtsseitige Ableitung übereinstimmen.

Lösung zu Aufgabe 5

a) Mit $y = \tan x$ ist $(\arctan)'(y) = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$.
b) $f'(x) = 3x^2 + 1$, $f'(1) = 4$, also $(f^{-1})'(2) = \frac{1}{4}$.
c) $\sqrt[3]{8} = 2$ und $(x^3)'|_{x=2} = 12$. Also $(\sqrt[3]{x})'|_{x=8} = \frac{1}{12}$.

Erläuterung: Die Umkehrregel folgt aus der Kettenregel, angewendet auf $f(f^{-1}(y)) = y$. Man braucht keine Formel für f^{-1}, sondern nur den Punkt $x = f^{-1}(y)$ und die Ableitung von f dort. Geometrisch werden Tangentensteigungen beim Spiegeln an der Winkelhalbierenden zu Kehrwerten. Wichtig ist, dass f' an dieser Stelle nicht null ist.

Lösung zu Aufgabe 6

a) $x^x = e^{x \ln x}$, $f'(x) = x^x(\ln x + 1)$. $f'(2) = 4(\ln 2 + 1) \approx 6{,}773$.
b) $g'(x) = x^{\sin x}\left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$. Bei $x = \frac{\pi}{2}$: $\frac{\pi}{2} \cdot \left(0 + \frac{2}{\pi}\right) = 1$.
c) $h'(x) = 2^x \ln 2$, $h'(3) = 8 \ln 2 \approx 5{,}545$.

Erläuterung: Steht die Variable sowohl in der Basis als auch im Exponenten, greift weder die Potenzregel noch die Regel für Exponentialfunktionen. Mit $u^v = e^{v \ln u}$ wird daraus eine Exponentialfunktion mit zusammengesetztem Exponenten, die man mit Ketten- und Produktregel ableitet. Das Ergebnis schreibt man wieder mit dem ursprünglichen Ausdruck als Faktor.

Lösung zu Aufgabe 7

a) $v(t) = -\frac{t^2}{2} + 6t$, $a(t) = -t + 6$.
b) $v(2) = -2 + 12 = 10$ m/s, das sind $10 \cdot 3{,}6 = 36$ km/h.
c) $v' = a = 0$ bei $t = 6$ (Maximum, da $a' = -1$): $v(6) = -18 + 36 = 18$ m/s $= 64{,}8$ km/h.
d) $v(12) = -72 + 72 = 0$. Abstand: $s(12) = -\frac{1728}{6} + 432 = -288 + 432 = 144$ m.
e) Mittlere Geschwindigkeit $\frac{144}{12} = 12$ m/s. $-\frac{t^2}{2} + 6t = 12$ liefert $t^2 - 12t + 24 = 0$, $t = 6 \pm \sqrt{12} \approx 2{,}54$ s und $9{,}46$ s. Der Mittelwertsatz sichert, dass es mindestens eine solche Stelle gibt.

Erläuterung: Geschwindigkeit ist die erste, Beschleunigung die zweite Ableitung des Weges.

Lösung zu Aufgabe 8

a) $A'(r) = 2\pi r$ ist der Umfang des Kreises: Wächst der Radius um Δr, kommt ein Ring der Breite Δr hinzu.
b) $\Delta A \approx 2\pi \cdot 15 \cdot 0{,}5 = 47{,}1\,\text{cm}^2$.
c) $\pi(15{,}5^2 - 15^2) = \pi \cdot 15{,}25 \approx 47{,}9\,\text{cm}^2$. Die Näherung liegt knapp darunter.
d) Relative Radiusabweichung $\frac{0{,}5}{15} \approx 3{,}33\,\%$, Flächenabweichung $\frac{47{,}1}{706{,}9} \approx 6{,}67\,\%$, also etwa das Doppelte, da $A'/A = 2/r$.
Erläuterung: Die Ableitung liefert eine lineare Näherung für kleine Änderungen: $\Delta A \approx A'(r)\Delta r$.

Lösung zu Aufgabe 9

a) $h = \frac{500}{\pi r^2}$.
b) $O = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{500}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{1000}{r}$.
c) $O'(r) = 4\pi r - \frac{1000}{r^2} = 0$ ergibt $r^3 = \frac{250}{\pi}$. Dann ist $h = \frac{500}{\pi r^2} = \frac{2 \cdot 250}{\pi r^2} = \frac{2r^3}{r^2} = 2r$.
d) $r = \sqrt[3]{250/\pi} \approx 4{,}30$ cm, $h \approx 8{,}60$ cm, $O \approx 348{,}7\,\text{cm}^2$. Minimum, denn $O''(r) = 4\pi + \frac{2000}{r^3} > 0$.
Erläuterung: Man drückt die Zielgröße mit der Nebenbedingung durch eine einzige Variable aus und setzt die Ableitung null. Das Ergebnis $h = 2r$ bedeutet, dass die Dose so hoch wie breit ist.

Lösung zu Aufgabe 10

a) Die dritte Seite ist $200 - 2x$. $A(x) = x(200 - 2x) = 200x - 2x^2$ mit 0.
b) $x = 40$: $40 \cdot 120 = 4800$; $x = 50$: $50 \cdot 100 = 5000$; $x = 60$: $60 \cdot 80 = 4800$ (Angaben in m^2).
c) $A'(x) = 200 - 4x = 0$ ergibt $x = 50$; $A'' = -4$, also Maximum. Seiten 50 m und 100 m, $A = 5000\,\text{m}^2$.
d) $5000/10 = 500$ Schafe.
Erläuterung: Die Wertetabelle zeigt die Symmetrie um $x = 50$, die Ableitung bestätigt dort das Maximum. Die lange Seite ist doppelt so lang wie die kurze, weil an der Mauer kein Zaun gebraucht wird.

Lösung zu Aufgabe 11

a) $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x-3)(x+1)$, $f''(x) = 6x - 6$.
b) $f' = 0$ bei $x = -1$ und $x = 3$. $f''(-1) = -12$: lokales Maximum
$f(-1) = -1 - 3 + 9 + 5 = 10$. $f''(3) = 12 > 0$: lokales Minimum
$f(3) = 27 - 27 - 27 + 5 = -22$.
c) f wächst auf $(-\infty, -1)$ und $(3, \infty)$, fällt auf $(-1, 3)$. Wendepunkt bei $f'' = 0$, also $x = 1$, mit $f(1) = 1 - 3 - 9 + 5 = -6$.
d) $f(-2) = -8 - 12 + 18 + 5 = 3 > 0$, $f(0) = 5 > 0$, $f(-1) = 10$; aber $f(5) = 125 - 75 - 45 + 5 = 10 > 0$ und $f(3) = -22$: Wechsel zwischen 0 und 3 und

zwischen 3 und 5 sowie wegen $f(x) \to -\infty$ für $x \to -\infty$ ein Wechsel links von -2. Also mindestens drei Nullstellen.

Lösung zu Aufgabe 12

a) Sekantensteigung $\frac{1-0}{e-1}$, Ableitung $\frac{1}{\xi}$. Also $\xi = e - 1 \approx 1{,}718 \in (1, e)$.
b) $g(1) = -1$ und $g(2) = 3 > 0$: Nach dem Zwischenwertsatz gibt es eine Nullstelle. Auf $(1, 2)$ ist $g'(x) = 3x^2 - 3 > 0$, also ist g streng monoton, und die Nullstelle ist eindeutig (zwei Nullstellen widersprächen dem Satz von Rolle).
c) f ist in 0 nicht differenzierbar, die Voraussetzung auf dem offenen Intervall ist verletzt. Tatsächlich ist die Sekantensteigung $\frac{2-1}{3} = \frac{1}{3}$, aber f' nimmt nur die Werte ± 1 an.

Lösung zu Aufgabe 13

a) Nach dem Mittelwertsatz ist $\sin a - \sin b = \cos\xi\,(a - b)$ mit ξ zwischen a und b. Wegen $|\cos\xi| \le 1$ folgt die Behauptung. □
b) Auf $[0, x]$: $e^x - 1 = e^\xi x$ mit $\xi \in (0, x)$. Wegen $e^\xi > 1$ ist $e^x - 1 > x$. □
c) Auf $[0, x]$: $\ln(1 + x) - \ln 1 = \frac{1}{1+\xi} \cdot x$ mit $\xi > 0$. Wegen $\frac{1}{1+\xi}$ folgt $\ln(1 + x)$. □
d) Auf $[100, 101]$: $\sqrt{101} - \sqrt{100} = \frac{1}{2\sqrt{\xi}}$, denn $\sqrt{\xi} > 10$. □

Lösung zu Aufgabe 14

a) $T(0) = 80$ °C; $T(5) = 20 + 60e^{-0{,}5} \approx 56{,}4$ °C.
b) $T'(t) = -6e^{-0{,}1t}$, $T'(0) = -6$ °C/min.
c) $60e^{-0{,}1t} = 20$, also $e^{-0{,}1t} = \frac{1}{3}$, $t = 10\ln 3 \approx 10{,}99$ min.
d) $T' = -6 \cdot \frac{1}{3} = -2$ °C/min. Allgemein gilt $T'(t) = -0{,}1\,(T(t) - 20)$: Die Abkühlung ist proportional zum Temperaturunterschied zur Umgebung.
Erläuterung: Die Ableitung ist negativ, weil der Kaffee abkühlt; ihr Betrag nimmt mit der Zeit ab.

Lösung zu Aufgabe 15

a) Stetigkeit: $g(1) = a + b + c = 2$. Glatter Anschluss: $g'(1) = 2a + b = 2$. Höhe: $g(3) = 9a + 3b + c = 8$.
b) Subtraktion der ersten von der dritten: $8a + 2b = 6$, also $4a + b = 3$. Mit $2a + b = 2$ folgt $2a = 1$, $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$, $c = \frac{1}{2}$. Also $g(x) = \frac{1}{2}(x + 1)^2$.
c) Links $f'(1) = 2$, rechts $g'(1) = x + 1 = 2$ und $g(1) = 2$: differenzierbar.
d) Links $f'' = 0$, rechts $g'' = 1$: Die Krümmung springt. Die Beschleunigung senkrecht zur Bahn ändert sich sprunghaft, der Fahrer spürt einen Ruck.

Lösung zu Aufgabe 16

a) $\frac{5000}{150} = 33{,}33$ m/s $= 120$ km/h.
b) s ist stetig und differenzierbar (die Bewegung ist glatt). Nach dem Mittelwertsatz

gibt es $\xi \in (0,150)$ mit $s'(\xi) = \frac{s(150)-s(0)}{150}$, also $v(\xi) = 120$ km/h. Das übersteigt 100 km/h.
c) Durchschnitt $\frac{5000}{180} \cdot 3{,}6 = 100$ km/h. Das schließt eine kurzzeitig höhere Geschwindigkeit nicht aus; nur eine Durchschnittsgeschwindigkeit über dem Limit beweist eine Überschreitung.
d) Mittelwertsatz auf $[0,4]$: $f(4) - f(0) = f'(\xi) \cdot 4 \le 12$, also $f(4) \le 2 + 12 = 14$. □

Lösung zu Aufgabe 17

a) $G(p) = (p-5)(1000-20p) - 2000 = -20p^2 + 1100p - 7000$.
b) $G(20) = 15 \cdot 600 - 2000 = 7000$; $G(25) = 20 \cdot 500 - 2000 = 8000$; $G(30) = 25 \cdot 400 - 2000 = 8000$.
c) $G'(p) = -40p + 1100 = 0$ ergibt $p = 27{,}5$; $G'' = -40$: Maximum.
d) Absatz $q = 1000 - 550 = 450$ Stück, Gewinn $G=22{,}5\cdot450-2000=8125\,€$.
Gewinn $G > 0$ für $-20p^2 + 1100p - 7000 > 0$, also für p zwischen $7{,}5$ und $47{,}5$ €.
Erläuterung: Der Gewinn ist eine nach unten geöffnete Parabel im Preis; ihr Scheitel liegt genau zwischen den Nullstellen.

Lösung zu Aufgabe 18

a) $f'(x) = 2x$, also $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{2x_n^2 - x_n^2 + 2}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$.
b) $x_1 = 1{,}416667$, $x_2 = 1{,}41421569$, $x_3 = 1{,}4142135624$.
c) Die Fehler sind etwa $2 \cdot 10^{-3}$, dann $2 \cdot 10^{-6}$, dann $2 \cdot 10^{-12}$: Die Zahl der richtigen Stellen verdoppelt sich ungefähr in jedem Schritt (quadratische Konvergenz).
d) Bei $x_0 = 0$ ist $f'(0) = 0$: Die Tangente ist waagerecht und schneidet die x-Achse nicht; die Formel verlangt eine Division durch null.

Lösung zu Aufgabe 19

a) Für x in I gilt $f(y) - f(x) = f'(\xi)(y-x) = 0$. □
b) $g'(x) = f'e^{-x} - fe^{-x} = 0$, also $g \equiv g(0) = 1$ und $f = e^x$. □
c) Für x ist $f(y) - f(x) = f'(\xi)(y-x) > 0$, also $f(y) \neq f(x)$. □
d) $f(a+h) - f(a) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \cdot h \to f'(a) \cdot 0 = 0$. □
Erläuterung: Alle Teile beruhen auf dem Mittelwertsatz $f(y) - f(x) = f'(\xi)(y-x)$: Das Vorzeichen der Ableitung bestimmt das Vorzeichen der Differenz der Funktionswerte. So folgt aus $f' = 0$ die Konstanz und aus $f' > 0$ die strenge Monotonie und damit die Injektivität. Teil d) zeigt umgekehrt, dass jede differenzierbare Funktion stetig ist.

Lösung zu Aufgabe 20

a) Form $\frac{0}{0}$: $\frac{-\sin x}{2x}$ (wieder $\frac{0}{0}$) $\to \frac{-\cos x}{2} \to -\frac{1}{2}$.
b) Form 1^∞. $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot x = \frac{\ln(1+1/x)}{1/x}$, Form $\frac{0}{0}$. Ableiten: $\frac{-\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1+1/x}}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+1/x} \to 1$. Also

ist der Grenzwert $e^1 = e$.
c) Form $\infty - \infty$: $\frac{\sin x - x}{x \sin x}$ (Form $\frac{0}{0}$) $\to$ $\frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x}$ ($\frac{0}{0}$) $\to$ $\frac{-\sin x}{2\cos x - x \sin x}$ $\to$ $\frac{0}{1} = 0$.
d) Form $\frac{\infty}{\infty}$: zweimal ableiten ergibt $\frac{2}{e^x} \to 0$.