Lösungen zur Klassenarbeit - Determinanten

Klasse: Studium 1 Semester · Dauer: 60 Minuten · /20

Lösung zu Aufgabe 1 (5 BE/Punkte)

a) Entwicklung nach Zeile 1: $1 \cdot (1 \cdot 1 - 0 \cdot 4) - 0 + 2 \cdot (3 \cdot 4 - 1 \cdot 0) = 1 + 24 = 25$ (2 P.).
b) $Z_3 - 2Z_1 = (0, 0, 1, 1)$, $Z_4 - Z_1 = (0, 0, 1, 2)$, dann $Z_4 - Z_3 = (0, 0, 0, 1)$. Diagonale $1, 1, 1, 1$: $\det = 1$ (3 P.).
Bei a) bietet sich die erste Zeile an, weil sie eine Null enthält; das Vorzeichenmuster $+, -, +$ ist zu beachten. Bei b) wäre eine Laplace-Entwicklung mühsam. Zeilenumformungen der Art „Vielfaches einer Zeile abziehen“ ändern die Determinante nicht; nach drei Schritten entsteht eine obere Dreiecksmatrix, deren Determinante das Produkt der Diagonale ist. Kontrolle für a) mit Sarrus: $1 + 0 + 24 - 0 - 0 - 0 = 25$.

Lösung zu Aufgabe 2 (4 BE/Punkte)

a) Entwicklung nach Zeile 1: $1 \cdot (4 - t^2) - t \cdot (t - 0) = 4 - 2t^2$ (2 P.).
b) $4 - 2t^2 = 0$ für $t = \pm\sqrt{2}$ (1 P.).
c) $A(0)$ ist diagonal mit $1, 4, 1$: $x = (3, 2, 5)^T$ (1 P.).
Die Entwicklung nach der ersten Zeile nutzt die Null oben rechts; der mittlere Summand trägt das Vorzeichen minus. Die Matrix ist genau dann nicht invertierbar, wenn ihre Determinante verschwindet, also für $t^2 = 2$. Für $t = 0$ ist die Matrix diagonal, und das System zerfällt in drei Einzelgleichungen $x_1 = 3$, $4x_2 = 8$, $x_3 = 5$. Probe durch Einsetzen bestätigt die Lösung.

Lösung zu Aufgabe 3 (4 BE/Punkte)

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 760 \end{pmatrix}$ (1 P.).
b) $\det A = 10 - 6 = 4$. $x = \frac{100 \cdot 10 - 760}{4} = 60$, $y = \frac{760 - 600}{4} = 40$ (2 P.).
c) $60 + 40 = 100$, $360 + 400 = 760$ (1 P.).
Die erste Gleichung zählt die Karten, die zweite die Einnahmen. Nach Cramer ersetzt man für x die erste Spalte durch die rechte Seite und erhält $\det \begin{pmatrix} 100 & 1 \\ 760 & 10 \end{pmatrix} = 240$; für y die zweite Spalte, $\det \begin{pmatrix} 1 & 100 \\ 6 & 760 \end{pmatrix} = 160$. Division durch 4 liefert sechzig Studierenden- und vierzig Normalkarten. Wegen $\det A = 4 \neq 0$ ist die Lösung eindeutig, und die Werte sind ganzzahlig, wie es für Kartenzahlen sein muss.

Lösung zu Aufgabe 4 (4 BE/Punkte)

a) $\det\begin{pmatrix}6 & 1\\ 2 & 5\end{pmatrix} = 30 - 2 = 28$, Dreieck $= 14\,\mathrm{m}^2$ (2 P.).
b) Obere Dreiecksmatrix mit Diagonale $1, 2, 3$: $V = 6\,\mathrm{m}^3$ (2 P.).
Für das Beet bildet man die Determinante aus den Ortsvektoren von P und Q, weil O der Ursprung ist; das Dreieck hat die halbe Parallelogrammfläche. Das Spatvolumen ist der Betrag der Determinante der drei Kantenvektoren. Da die Matrix obere Dreiecksgestalt hat, genügt das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3$. Ein negatives Vorzeichen hätte nur die Orientierung angezeigt.

Lösung zu Aufgabe 5 (3 BE/Punkte)

a) $2^3 \cdot (-2) = -16$ (1 P.).
b) $(-2)^2 = 4$ (1 P.).
c) $-\frac{1}{2}$ (1 P.).
Multipliziert man eine 3×3-Matrix mit 2, wird jede der drei Zeilen verdoppelt, deshalb erscheint der Faktor $2^3 = 8$. Der Produktsatz $\det(AB) = \det A \det B$ liefert $\det(A^2) = (\det A)^2$ und, angewendet auf $AA^{-1} = E$, die Beziehung $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$. Typischer Fehler: $\det(2A) = 2\det A$. Gleichwertig: $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$, und eine Matrix mit $\det A \neq 0$ ist stets invertierbar.