Lernzettel - Determinanten

Klasse: Studium 1 Semester

Einstieg: Wie stark verzerrt eine Abbildung?

In einem Computerspiel wird ein quadratisches Bild von einem Pixel Kantenlänge durch eine lineare Abbildung in ein Parallelogramm verwandelt. Die Entwickler wollen vorher wissen, ob die Fläche wächst oder schrumpft und ob das Bild dabei „umgeklappt“ wird. Dieselbe Frage stellt sich in der Statistik, in der Physik und in der Wirtschaft, sobald ein lineares Gleichungssystem eindeutig lösbar sein soll. Die Determinante beantwortet alle diese Fragen mit einer einzigen Zahl: Ihr Betrag ist der Skalierungsfaktor für Flächen und Volumina, ihr Vorzeichen verrät die Orientierung, und der Wert null zeigt an, dass die Abbildung Dimensionen vernichtet und daher nicht umkehrbar ist.

Definition und Berechnung

Definition: Definition und Berechnung

Die **Determinante** ordnet jeder quadratischen Matrix A eine Zahl $\det A$ zu. Für 2×2-Matrizen gilt $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$. Für 3×3-Matrizen liefert die **Regel von Sarrus** $\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$. Allgemein gilt die **Laplace-Entwicklung** nach der i-ten Zeile: $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$, wobei A_{ij} die Streichmatrix ist (Zeile i und Spalte j gestrichen). Man entwickelt am besten nach der Zeile oder Spalte mit den meisten Nullen. Die Vorzeichen folgen dem Schachbrettmuster $+ - + \ldots$.

Eigenschaften

Definition: Eigenschaften

Die Determinante ist **linear in jeder Zeile** (bei festen anderen Zeilen) und **alternierend**: Zeilenvertauschung ändert das Vorzeichen, zwei gleiche Zeilen ergeben 0. Daraus folgen: Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen ändert $\det$ nicht; Multiplikation einer Zeile mit λ multipliziert $\det$ mit λ, also gilt $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$. Bei Dreiecksmatrizen ist $\det$ das Produkt der Diagonalelemente. Weiter gelten $\det A^T = \det A$, $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ (Produktsatz) und $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$. Hauptsatz: A ist genau dann invertierbar, wenn $\det A \neq 0$, also wenn die Zeilen (Spalten) linear unabhängig sind.

Cramersche Regel und Geometrie

Definition: Cramersche Regel und Geometrie

Ist $\det A \neq 0$, hat $Ax = b$ die eindeutige Lösung $x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$, wobei A_i aus A durch Ersetzen der i-ten Spalte durch b entsteht. Für größere Systeme ist das Gauß-Verfahren effizienter, die Regel ist aber für Formeln nützlich. Geometrisch ist $|\det(v_1, v_2)|$ der Flächeninhalt des von v_1, v_2 aufgespannten Parallelogramms und $|\det(v_1, v_2, v_3)|$ das Volumen des Spats; das Vorzeichen gibt die Orientierung an. Die Determinante einer Drehung ist $+1$, die einer Spiegelung -1. Eine lineare Abbildung skaliert Flächen/Volumina mit dem Faktor $|\det A|$.

So gehst du vor: Determinante berechnen

1. Bei 2×2 und 3×3: Formel bzw. Regel von Sarrus.
2. Sonst Entwicklung nach der Zeile oder Spalte mit den meisten Nullen.
3. Alternativ mit Zeilenumformungen auf Dreiecksform bringen (Vorzeichen bei Vertauschung, Faktor bei Skalierung beachten).
4. $\det \neq 0$ heißt invertierbar.

Beispiel 1 (Sarrus)

Gesucht ist . Positive Produkte: $1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$, $2 \cdot 4 \cdot 5 = 40$, $3 \cdot 0 \cdot 6 = 0$.

Negative Produkte: $3 \cdot 1 \cdot 5 = 15$, $1 \cdot 4 \cdot 6 = 24$, $2 \cdot 0 \cdot 0 = 0$. Also $\det = 40 - 15 - 24 = 1$.

Beispiel 2 (Laplace)

, Entwicklung nach Zeile 1:

$2 \cdot (3 \cdot 1 - 2 \cdot 1) - 0 + 1 \cdot (1 \cdot 1 - 3 \cdot 0) = 2 \cdot 1 + 1 = 3.$

Beispiel 3 (Cramer)

$x + 2y = 5$, $3x + 4y = 6$: $\det A = 4 - 6 = -2$. $x = \frac{5 \cdot 4 - 2 \cdot 6}{-2} = -4$, $y = \frac{1 \cdot 6 - 3 \cdot 5}{-2} = \frac{9}{2}$. Probe: $-4 + 9 = 5$ ✓, $-12 + 18 = 6$ ✓.

Der geometrische Hintergrund

Die Formel $ad - bc$ ist kein Zufall. Die Spaltenvektoren $v_1 = (a, c)$ und $v_2 = (b, d)$ spannen ein Parallelogramm auf. Sein Flächeninhalt ist Grundseite mal Höhe, und eine kurze

Rechnung mit dem Rechteck um das Parallelogramm ergibt genau $|ad - bc|$. Liegen die beiden Vektoren auf einer Geraden, entartet das Parallelogramm zu einem Strich ohne Fläche, und die Determinante ist null. Das Vorzeichen zeigt, ob der Übergang von v_1 nach v_2 gegen den Uhrzeigersinn (positiv) oder im Uhrzeigersinn (negativ) erfolgt. Im Raum entspricht dem Parallelogramm der Spat, ein schiefer Quader, und die Determinante der drei Spaltenvektoren ist sein Volumen mit Vorzeichen; man nennt sie auch Spatprodukt. Weil eine lineare Abbildung $x \mapsto Ax$ jede Figur um denselben Faktor streckt, ist $|\det A|$ der Flächen- beziehungsweise Volumenfaktor der Abbildung.

Beispiel 4 (Flächeninhalt eines Dreiecks)

Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks mit den Ecken $P(1|1)$, $Q(5|2)$, $R(3|6)$.

Verschieben Sie P in den Ursprung: , . Dann ist

$\det \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = 20 - 2 = 18$ die Fläche des Parallelogramms, das Dreieck hat die Hälfte: $A = 9$ Flächeneinheiten.

Rechenregeln im Detail

Die drei Grundeigenschaften – Linearität in jeder Zeile, Vorzeichenwechsel beim Vertauschen und $\det E = 1$ – legen die Determinante eindeutig fest. Aus ihnen folgen alle praktischen Regeln. Addiert man ein Vielfaches einer Zeile zu einer anderen, bleibt der Wert gleich, denn der zusätzliche Summand enthält zwei proportionale Zeilen und ist daher null. Multipliziert man eine einzelne Zeile mit λ, wird die Determinante mit λ multipliziert; multipliziert man die ganze $n \times n$-Matrix mit λ, kommt der Faktor λ^n zustande, weil jede der n Zeilen betroffen ist. Eine Nullzeile oder zwei gleiche (oder proportionale) Zeilen liefern $\det = 0$. Weil $\det A^T = \det A$ gilt, gelten alle Zeilenregeln genauso für Spalten.

So gehst du vor: Determinante durch Zeilenumformung

1. Wählen Sie ein Pivotelement in der ersten Spalte, am besten eine 1 oder -1; vertauschen Sie dazu notfalls Zeilen und notieren Sie jeden Tausch als Faktor -1.
2. Erzeugen Sie unterhalb des Pivots Nullen mit $Z_i \to Z_i - \lambda Z_1$; der Wert bleibt dabei unverändert.
3. Wiederholen Sie dies mit der Untermatrix, bis eine obere Dreiecksmatrix entsteht.
4. Multiplizieren Sie die Diagonalelemente und berücksichtigen Sie die gemerkten Vorzeichen.

Beispiel 5 (Zeilenumformung bei einer 4x4-Matrix)

Berechnen Sie .

Mit $Z_2 \to Z_2 - 2Z_1$ und $Z_4 \to Z_4 - Z_1$ entstehen die Zeilen $(0,1,1,1)$ und $(0,1,2,5)$. Mit $Z_3 \to Z_3 - Z_2$ und $Z_4 \to Z_4 - Z_2$ folgt für Zeile 3 $(0,0,2,1)$ und für Zeile 4 $(0,0,1,4)$. Nun $Z_4 \to Z_4 - \frac{1}{2}Z_3$ ergibt in der letzten Zeile $(0,0,0,\frac{7}{2})$. Das Produkt der Diagonale ist $1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{7}{2} = 7$. Es gab keine Zeilenvertauschung, also ist $\det = 7$.

Laplace-Entwicklung und Kofaktoren

Die Entwicklung nach der i-ten Zeile schreibt eine $n \times n$-Determinante als Summe von n Determinanten der Größe $n-1$. Das Vorzeichen $(-1)^{i+j}$ folgt dem Schachbrettmuster, das links oben mit $+$ beginnt. Die Zahl $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ heißt Kofaktor. Entwickelt man nach einer Zeile i, verwendet aber die Kofaktoren einer *anderen* Zeile, entsteht stets null – ein Hinweis darauf, wie man die inverse Matrix über die Adjunkte $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,(C_{ij})^T$ gewinnt. Für 2×2-Matrizen ergibt dies die vertraute Formel $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Beispiel 6 (Entwicklung nach einer Spalte)

Berechnen Sie .

Die zweite Spalte enthält zwei Nullen. Entwicklung nach Spalte 2: Nur der Eintrag $a_{32} = 4$ trägt bei, sein Vorzeichen ist $(-1)^{3+2} = -1$. Die Streichmatrix $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ hat die Determinante $15 - 2 = 13$. Also $\det = -4 \cdot 13 = -52$.

Invertierbarkeit, Rang und Gleichungssysteme

Eine quadratische Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn $\det A \neq 0$. Gleichwertig dazu sind: Die Spalten sind linear unabhängig, der Rang ist n, das homogene System $Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung, und $Ax = b$ ist für jedes b eindeutig lösbar. Ist dagegen $\det A = 0$, hat $Ax = b$ entweder keine oder unendlich viele Lösungen. Für Matrizen mit einem Parameter t berechnet man $\det A(t)$ als Polynom in t; die Nullstellen sind genau die Parameterwerte, bei denen die Matrix nicht invertierbar ist. Die Cramersche Regel liefert bei $\det A \neq 0$ jede Unbekannte als Quotient zweier Determinanten. Sie ist besonders nützlich, wenn nur eine einzige Unbekannte gesucht ist oder wenn die Koeffizienten Parameter enthalten; für große Systeme ist das Gauß-Verfahren viel schneller.

Beispiel 7 (Parameter)

Für welche t ist $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & t^2 \\ 1 & t^2 & t^4 \end{vmatrix}$ nicht invertierbar?

Subtrahiert man Zeile 1 von den Zeilen 2 und 3, entstehen die Zeilen $(0, t-1, t^2-1)$ und $(0, t^2-1, t^4-1)$. Entwicklung nach Spalte 1 liefert $\det = (t-1)(t^4-1) - (t^2-1)^2$. Ausklammern von $(t-1)(t^2-1)$ ergibt $(t-1)(t^2-1)\big[(t^2+1)-(t+1)\big] = (t-1)(t^2-1)\,t\,(t-1)$, also $\det = t(t-1)^3(t+1)$. Die Matrix ist daher genau für $t \in \{-1, 0, 1\}$ nicht invertierbar.

Die inverse Matrix über Determinanten

Für kleine Matrizen lässt sich die Inverse direkt mit Determinanten berechnen. Man bildet zu jedem Eintrag a_{ij} den Kofaktor $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$, schreibt diese Zahlen in eine Matrix, transponiert sie und teilt durch $\det A$. Diese transponierte Kofaktormatrix heißt Adjunkte. Der Vorteil dieser Formel ist, dass sie für Matrizen mit Parametern exakte Ausdrücke liefert; der Nachteil ist der Rechenaufwand: Bei einer 4×4-Matrix müssen bereits sechzehn 3×3-Determinanten berechnet werden, weshalb man in der Praxis das Gauß-Jordan-Verfahren bevorzugt. Als Kontrolle gilt immer $A \cdot A^{-1} = E$, und es muss $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$ sein.

Beispiel 8 (Inverse einer 2x2-Matrix)

Bestimmen Sie die Inverse von $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Zuerst $\det A = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 5 = 1 \neq 0$, die Inverse existiert. Mit der Formel $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ folgt $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$. Probe: Die erste Zeile mal die erste Spalte ergibt $3 \cdot 2 + 1 \cdot (-5) = 1$, die erste Zeile mal die zweite Spalte $3 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 = 0$. Genauso ergeben die zweite Zeile $5 \cdot 2 + 2 \cdot (-5) = 0$ und $5 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 = 1$. Also $AA^{-1} = E$.

Spezielle Matrizen und ihre Determinanten

Viele Matrizen in Anwendungen haben eine Struktur, die die Rechnung stark vereinfacht. Bei Dreiecksmatrizen und Diagonalmatrizen liest man die Determinante an der Diagonale ab. Bei **Blockdreiecksmatrizen** $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ mit quadratischen Blöcken A und D gilt $\det = \det A \cdot \det D$. **Orthogonale Matrizen** (Drehungen und Spiegelungen) haben $\det = \pm 1$, weil sie Längen und Winkel erhalten und daher Flächen nicht verändern. **Schiefsymmetrische Matrizen** ungerader Größe haben stets $\det = 0$. **Vandermonde-Matrizen** mit den Zeilen $(1, x_i, x_i^2, \ldots)$ sind genau dann invertierbar, wenn die x_i paarweise verschieden sind – deshalb ist die Polynominterpolation durch $n+1$ Punkte mit verschiedenen x-Werten eindeutig. Wer solche Strukturen erkennt, spart in der Klausur viel Zeit.

Determinante und Gauß-Verfahren im Vergleich

Das Gauß-Verfahren und die Determinante beschreiben dieselbe Sache aus zwei Blickwinkeln. Wenn Sie ein Gleichungssystem mit dem Gauß-Verfahren auf Stufenform bringen, multiplizieren die Diagonalelemente der Stufenform (bis auf Vorzeichen durch Zeilenvertauschungen) zur Determinante der Koeffizientenmatrix. Ein fehlendes Pivotelement bedeutet genau $\det A = 0$. Beide Werkzeuge sind daher austauschbar, wenn es nur um die Frage der eindeutigen Lösbarkeit geht. Für die Berechnung einer konkreten Lösung ist das Gauß-Verfahren schneller: Es braucht etwa $\frac{1}{3}n^3$ Rechenoperationen, die Cramersche Regel mit der Laplace-Entwicklung dagegen $n!$ Operationen. Schon bei $n = 10$ sind das über drei Millionen Operationen gegenüber rund dreihundert.

Beispiel 9 (Lösbarkeit mit Parameter)

Für welche a hat $x + ay = 1$, $ax + y = 2$ genau eine Lösung? Bestimmen Sie diese.

Die Koeffizientendeterminante ist $1 - a^2$. Sie verschwindet für $a = 1$ und $a = -1$. Für $a \neq \pm 1$ ist das System eindeutig lösbar, und die Cramersche Regel liefert $x = \frac{1 \cdot 1 - a \cdot 2}{1 - a^2} = \frac{1 - 2a}{1 - a^2}$ und $y = \frac{1 \cdot 2 - a \cdot 1}{1 - a^2} = \frac{2 - a}{1 - a^2}$. Für $a = 1$ lauten die Gleichungen $x + y = 1$ und $x + y = 2$: Das System hat keine Lösung. Für $a = -1$ lauten sie $x - y = 1$ und $-x + y = 2$, addiert ergibt sich $0 = 3$: wieder keine Lösung.

Hinweis: So lernen Sie Determinanten für die Klausur

Üben Sie zuerst die drei Standardwege getrennt: Sarrus für 3×3, Entwicklung für Matrizen mit Nullen und Zeilenumformung für größere Matrizen. Rechnen Sie danach jede Aufgabe mit einem zweiten Weg gegen. Stimmen beide Ergebnisse überein, ist ein Rechenfehler sehr unwahrscheinlich. Lernen Sie außerdem die Folgerungen aus $\det A = 0$ auswendig: Die Zeilen sind linear abhängig, die Matrix hat keine Inverse, das homogene System hat nichttriviale Lösungen, und die Abbildung vernichtet Fläche oder Volumen. In mündlichen Prüfungen wird gern gefragt, warum eine Determinante genau dann verschwindet, wenn die Spalten abhängig sind; die Antwort liefert die Alternierungseigenschaft: Gleiche Spalten ergeben null, und eine abhängige Spalte lässt sich durch Spaltenumformungen in eine Nullspalte verwandeln.

Achtung: Typische Fehler bei Determinanten

Erstens: Die Regel von Sarrus gilt nur für 3×3-Matrizen; bei 4×4-Matrizen liefert sie falsche Ergebnisse. Zweitens: Das Vorzeichenmuster der Laplace-Entwicklung wird oft falsch gesetzt; merken Sie sich das Schachbrett mit $+$ links oben. Drittens: Beim Vertauschen von Zeilen ändert sich das Vorzeichen, beim Addieren eines Vielfachen nicht. Viertens: Wird eine Zeile mit λ multipliziert, muss man anschließend durch λ teilen, wenn man den ursprünglichen Wert bestimmen will. Fünftens: Aus $\det A = 0$ folgt nicht, dass A die Nullmatrix ist – es genügt eine einzige Abhängigkeit zwischen den Zeilen.

Wusstest du? Seki, Leibniz und die Matrix

Die Determinante wurde um 1683 gleichzeitig und unabhängig vom Japaner Seki Takakazu und von Gottfried Wilhelm Leibniz gefunden – lange vor dem Begriff „Matrix“, der erst 1850 von James Joseph Sylvester geprägt wurde. Das Wort „Determinante“ stammt von Gauß. Heute stecken Determinanten in der Computergrafik (Orientierung von Dreiecken), in der Statistik (Kovarianzmatrizen) und in der Physik (Jacobi-Determinante beim Koordinatenwechsel in Integralen).

So gehst du vor: Welches Verfahren wähle ich?

1. Bei 2×2: sofort $ad - bc$.
2. Bei 3×3 ohne viele Nullen: Regel von Sarrus, sonst Entwicklung nach der nullenreichsten Zeile oder Spalte.
3. Ab 4×4: erst mit Zeilenumformungen Nullen erzeugen, dann entwickeln oder die Diagonale multiplizieren.
4. Bei Parametern: nur Umformungen ohne Division durch den Parameter benutzen, am besten entwickeln.
5. Immer eine Kontrolle durchführen, etwa mit einer zweiten Entwicklung oder durch Einsetzen eines Spezialwerts.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- 2×2: $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$; 3×3: Regel von Sarrus oder Laplace-Entwicklung nach einer Zeile oder Spalte mit vielen Nullen.
- Die Determinante ist linear in jeder Zeile, wechselt bei Zeilenvertauschung das Vorzeichen und ist 0 bei zwei gleichen Zeilen oder einer Nullzeile.
- Die Zeilenumformung „Vielfaches einer Zeile addieren“ ändert $\det$ nicht; bei Dreiecksmatrizen ist $\det$ das Produkt der Diagonalelemente.
- $\det(AB) = \det A \cdot \det B$, $\det A^T = \det A$, $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$; aber $\det(A + B) \neq \det A + \det B$.
- A ist genau dann invertierbar, wenn $\det A \neq 0$; dann hat $Ax = b$ eine eindeutige Lösung, und die Cramersche Regel liefert $x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$.
- Geometrie: $|\det|$ ist der Flächeninhalt des Parallelogramms bzw. das Volumen des Spats der Spaltenvektoren und der Flächen- bzw. Volumenfaktor der Abbildung $x \mapsto Ax$; das Vorzeichen gibt die Orientierung an.
- Parameteraufgaben: $\det A(t)$ als Polynom berechnen, die Nullstellen sind die Werte, für die A nicht invertierbar ist.

Achtung

Typische Fehler: Sarrus auf 4×4-Matrizen anwenden (gilt nur für 3×3); Vorzeichen bei der Laplace-Entwicklung vergessen; $\det(A + B) = \det A + \det B$ annehmen (falsch!); $\det(2A) = 2 \det A$ rechnen (richtig: $2^n \det A$).

Ottos Tipp

Bringen Sie größere Matrizen mit Zeilenumformungen (nur $Z_i + \lambda Z_j$) auf Dreiecksform und multiplizieren Sie die Diagonale; beim Vertauschen von Zeilen das Vorzeichen mitführen.