# Arbeitsblatt - Determinanten

Klasse: Studium 1 Semester · 20

Der Rechenweg muss angegeben werden.

## Aufgabe 1

### Aufgabe 1 – Zweimal-zwei-Determinanten

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden $2 \times 2$-Matrizen und entscheiden Sie jeweils, ob die Matrix invertierbar ist.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0{,}5 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

### Aufgabe 2 – Regel von Sarrus

Berechnen Sie mit der Regel von Sarrus: Summe der drei Produkte der Hauptdiagonalen-Richtung minus Summe der drei Produkte der Nebendiagonalen-Richtung.

a)

b)

c)

## Aufgabe 3

### Aufgabe 3 – Entwicklung nach Zeile oder Spalte

Berechnen Sie mit der Laplace-Entwicklung nach der günstigsten Zeile oder Spalte und begründen Sie Ihre Wahl.

a) 

b) 

c) 

## Aufgabe 4

**Aufgabe 4 – Dreiecksmatrizen**

Bei Dreiecksmatrizen ist die Determinante das Produkt der Diagonalelemente. Berechnen Sie ohne Entwicklung.

a) 

b) 

c) Die Einheitsmatrix $E_5$ und $\operatorname{diag}(1,2,3,4,5)$

## Aufgabe 5

**Aufgabe 5 – Rechenregeln anwenden**

Für eine $3 \times 3$-Matrix $A$ gilt $\det A = 3$. Bestimmen Sie die folgenden Determinanten und nennen Sie jeweils die verwendete Regel.

a) $\det(2A)$ und $\det(-A)$
b) $\det(A^T)$ und $\det(A^{-1})$
c) $\det(A^3)$ und $\det(A^2 A^{-1})$
d) Die Matrix $B$ entstehe aus $A$ durch Vertauschen zweier Zeilen und Multiplikation der dritten Zeile mit $5$. Bestimmen Sie $\det B$.

## Aufgabe 6

**Aufgabe 6 – Parameter und Invertierbarkeit**

Bestimmen Sie alle Werte des Parameters $t$, für die die Matrix nicht invertierbar ist.

a) $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} t & 2 \\ 8 & t \end{pmatrix}$

c) 

## Aufgabe 7

### Aufgabe 7 – Das Grundstück

Ein Grundstück hat die Form eines Dreiecks. In einem Koordinatensystem (Einheit: 1 m) liegen die Eckpunkte bei $P(0|0)$, $Q(60|10)$ und $R(20|50)$. Der Bodenrichtwert beträgt *180\,€* pro Quadratmeter.

a) Stellen Sie die Vektoren  und  als Spalten einer Matrix auf.

b) Berechnen Sie die Determinante und daraus die Fläche des Dreiecks.
c) Wie viel ist das Grundstück wert?
d) Der Punkt $R$ wird zum Punkt $S(20|-50)$ gespiegelt. Wie ändert sich das Vorzeichen der Determinante und wie die Fläche?

## Aufgabe 8

### Aufgabe 8 – Das Kristallvolumen

Ein Kristall in der Materialforschung hat Kanten, die vom Ursprung ausgehend durch die Vektoren $a = (2, 0, 0)$, $b = (1, 3, 0)$ und $c = (1, 1, 4)$ (Einheit: Nanometer) gegeben sind. Der Kristall ist ein Spat.

a) Stellen Sie die Matrix aus den Spalten $a, b, c$ auf.
b) Berechnen Sie das Volumen des Spats.
c) Ein zweiter Kristall hat die Kanten $a$, $b$ und $d = (3, 3, 0)$. Berechnen Sie die Determinante und deuten Sie das Ergebnis.
d) Wie ändert sich das Volumen des ersten Kristalls, wenn alle drei Kanten verdoppelt werden?

## Aufgabe 9

### Aufgabe 9 – Cramer im Café

Im Campus-Café kostet ein Kaffee $x$ Euro und ein Brötchen $y$ Euro. Bestellung 1: 2 Kaffee und 3 Brötchen für *8{,}40\,€*. Bestellung 2: 3 Kaffee und 1 Brötchen für ebenfalls *8{,}40\,€*.

a) Stellen Sie das System in Matrixform $Ax = b$ auf.
b) Berechnen Sie $\det A$.
c) Bestimmen Sie $x$ und $y$ mit der Cramerschen Regel.
d) Machen Sie die Probe und berechnen Sie den Preis für 4 Kaffee und 5 Brötchen.

## Aufgabe 10

### Aufgabe 10 – Cramer mit drei Unbekannten

Lösen Sie das System mit der Cramerschen Regel: $x + y + z = 6$, $2x - y + z = 3$, $x + 2y - z = 2$. Berechnen Sie die Determinanten mit der Regel von Sarrus oder durch Entwicklung.

a) Bestimmen Sie $\det A$ mit Entwicklung nach Zeile 1.
b) Berechnen Sie die drei Determinanten $\det A_1, \det A_2, \det A_3$.
c) Geben Sie die Lösung an und machen Sie die Probe.

## Aufgabe 11

### Aufgabe 11 – Zeilenumformung bei vier Zeilen

Bringen Sie die Matrizen mit Zeilenumformungen $Z_i \to Z_i - \lambda Z_j$ auf Dreiecksform und berechnen Sie die Determinante.

a)

b)

c) Ist die Matrix aus a) invertierbar? Was bedeutet das für das System $Ax = 0$?

## Aufgabe 12

### Aufgabe 12 – Produktsatz prüfen

Gegeben sind $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie $\det A$ und $\det B$.
b) Berechnen Sie $AB$ und $\det(AB)$. Stimmt der Produktsatz?
c) Berechnen Sie $\det(BA)$. Ist $AB = BA$?
d) Berechnen Sie $\det(A + B)$ und vergleichen Sie mit $\det A + \det B$.

## Aufgabe 13

### Aufgabe 13 – Streckung im Computerspiel

Ein Spiel verarbeitet Bilder mit der Abbildung $S(x) = Sx$ mit $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ (Streckung mit Scherung). Eine rechteckige Figur im Spiel ist $5$ Pixel breit und $4$ Pixel hoch. Danach

wird sie mit $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ um $90^\circ$ gedreht.

a) Berechnen Sie den Flächenfaktor von $S$ und die Fläche der Figur nach der Abbildung $S$.
b) Berechnen Sie $\det R$. Was bedeutet das Ergebnis?
c) Bestimmen Sie $\det(SR)$ mit dem Produktsatz und bestätigen Sie durch Ausmultiplizieren $SR = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.
d) Eine Spiegelung $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ kommt noch hinzu. Wie ändert sich $\det$ der Gesamtabbildung und die Orientierung?

## Aufgabe 14

### Aufgabe 14 – Vier Messpunkte im Gelände

Eine Vermessungsgruppe bestimmt in den Bergen vier Punkte $A(1|0|0)$, $B(0|1|0)$, $C(0|0|1)$ und $D(1|1|-1)$ (Einheit: 100 m). Sie wollen wissen, ob die vier Punkte in einer gemeinsamen Ebene liegen.

a) Bilden Sie die Vektoren , und .

b) Berechnen Sie die Determinante der Matrix aus diesen Spaltenvektoren.
c) Entscheiden Sie, ob die Punkte koplanar sind.
d) Ein fünfter Punkt $E(1|1|1)$ wird ergänzt. Welches Volumen hat die dreiseitige Pyramide $ABCE$? (Volumen $= \frac{1}{6}|\det|$)

## Aufgabe 15

### Aufgabe 15 – Die Vandermonde-Determinante

Für Zahlen $a, b, c$ heißt Vandermonde-Determinante. Sie spielt bei der Polynominterpolation eine zentrale Rolle.

a) Berechnen Sie $V$ für $a = 1$, $b = 2$, $c = 4$ mit Sarrus.
b) Zeigen Sie durch Spaltenumformung, dass $V = (b-a)(c-a)(c-b)$ gilt.
c) Wann ist $V = 0$? Was bedeutet das für Interpolationspunkte?
d) Bestimmen Sie die Parabel $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ durch $(1|2)$, $(2|5)$, $(3|10)$ mit der Cramerschen Regel.

## Aufgabe 16

### Aufgabe 16 – Maschenströme in einer Schaltung

In einem Netzwerk mit drei Maschen gilt für die Ströme $I_1, I_2, I_3$ (in Ampere) und die Widerstände (in Ohm) das System $10I_1 - 4I_2 = 12$, $-4I_1 + 12I_2 - 5I_3 = 6$,

$-5I_2 + 9I_3 = 8$. Die Koeffizientenmatrix ist $A$.

a) Berechnen Sie $\det A$ durch Entwicklung nach Zeile 1.
b) Berechnen Sie $\det A_1$ mit der rechten Seite $b = (12, 6, 8)$ in der ersten Spalte.
c) Bestimmen Sie $I_1$ und überprüfen Sie $I_1 = I_2 = I_3 = 2\,\text{A}$ in allen drei Gleichungen.
d) Warum ist die eindeutige Lösbarkeit physikalisch wichtig, und woran erkennt man sie?

## Aufgabe 17

### Aufgabe 17 – Verflechtung zweier Branchen

Zwei Branchen einer Volkswirtschaft, Industrie (I) und Energie (E), liefern sich gegenseitig Vorleistungen. Pro Einheit Produktion braucht I jeweils $0{,}2$ Einheiten aus I und $0{,}4$ aus E; E braucht $0{,}3$ aus I und $0{,}1$ aus E. Die Endnachfrage beträgt $60$ Einheiten I und $30$ Einheiten E (in Mio. €). Für die Produktion $x = (x_1, x_2)$ gilt $(E - A)x = d$.

a) Stellen Sie $E - A$ und $d$ auf.
b) Berechnen Sie $\det(E - A)$.
c) Bestimmen Sie $x_1$ und $x_2$ mit der Cramerschen Regel.
d) Prüfen Sie das Ergebnis, indem Sie berechnen, wie viel I aus I und E aus I für $x_2 = 80$ verbraucht wird.

## Aufgabe 18

### Aufgabe 18 – Beweise mit dem Produktsatz

Beweisen Sie mit den Rechenregeln der Determinante ($A, B$ sind $n \times n$-Matrizen).

a) Gilt $A^2 = E$, so ist $\det A = 1$ oder $\det A = -1$.
b) Ist $A$ schiefsymmetrisch ($A^T = -A$) und $n$ ungerade, so ist $\det A = 0$.
c) Gilt $A^k = 0$ für ein $k \geq 1$ (nilpotent), so ist $\det A = 0$.
d) Ist $AB$ invertierbar, so sind $A$ und $B$ invertierbar.

## Aufgabe 19

### Aufgabe 19 – Matrix mit gleichen Einträgen

Sei $M_n(a, b)$ die $n \times n$-Matrix mit $a$ auf der Hauptdiagonale und $b$ an allen anderen Stellen. Sie tritt bei Kovarianzmatrizen gleichkorrelierter Messreihen auf.

a) Berechnen Sie $\det M_3(5, 2)$ mit Sarrus.
b) Zeigen Sie $\det M_3(a, b) = (a - b)^2(a + 2b)$ durch Addition aller Zeilen zur ersten und Subtraktion.
c) Für welche $a$ ist $M_3(a, 2)$ nicht invertierbar?
d) Die Formel für $n = 4$ lautet $(a - b)^3(a + 3b)$. Prüfen Sie sie für $a = 3$, $b = 1$.

## Aufgabe 20

### Aufgabe 20 – Eigenwerte von zwei Pendeln

Zwei gekoppelte Pendel werden durch die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ beschrieben. Die Schwingungsfrequenzen ergeben sich aus den Zahlen $\lambda$, für die $A - \lambda E$ nicht invertierbar ist, also $\det(A - \lambda E) = 0$.

a) Stellen Sie $\det(A - \lambda E)$ auf und lösen Sie die Gleichung.

b) Wiederholen Sie dies für $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

c) Zeigen Sie an beiden Beispielen: Die Summe der Lösungen ist die Spur, das Produkt ist $\det$.

d) Warum ist $\lambda = 0$ genau dann eine Lösung, wenn $\det A = 0$?