Lösungen - Determinanten

Klasse: Studium 1 Semester

Lösung zu Aufgabe 1

a) $2 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 8 - 3 = 5 \neq 0$: invertierbar.
b) $3 \cdot 1 - (-2) \cdot 4 = 3 + 8 = 11 \neq 0$: invertierbar.
c) $6 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = 6 - 6 = 0$: nicht invertierbar, denn die Zeilen sind proportional.
d) $0{,}5 \cdot 4 - 1 \cdot (-2) = 2 + 2 = 4 \neq 0$: invertierbar.
Erläuterung: Bei 2×2-Matrizen ist die Determinante das Produkt der Hauptdiagonale minus das Produkt der Nebendiagonale. Eine quadratische Matrix ist genau dann invertierbar, wenn ihre Determinante nicht null ist. Geometrisch bedeutet $\det = 0$, dass die beiden Spaltenvektoren auf einer Geraden liegen und das von ihnen aufgespannte Parallelogramm keine Fläche hat; dann kann die Abbildung nicht umgekehrt werden.

Lösung zu Aufgabe 2

a) Haupt: $1 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 0 + 0 \cdot 3 \cdot 5 = 2$. Neben:
$0 \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot 3 \cdot 2 = 0 + 20 + 12 = 32$. $\det = 2 - 32 = -30$.
b) Haupt: $2 \cdot 4 \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 \cdot 5 + 3 \cdot 0 \cdot 2 = -16 - 5 + 0 = -21$. Neben:
$3 \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 \cdot (-2) = 60 + 4 + 0 = 64$. $\det = -21 - 64 = -85$.
c) Haupt: $45 + 84 + 96 = 225$. Neben: $3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 \cdot 6 \cdot 8 + 2 \cdot 4 \cdot 9 = 105 + 48 + 72 = 225$.
$\det = 0$: Die Zeilen sind linear abhängig, denn $Z_3 = 2Z_2 - Z_1$.
Erläuterung: Die Regel von Sarrus gilt nur für 3×3-Matrizen. Am sichersten schreibt man die ersten beiden Spalten noch einmal rechts neben die Matrix und bildet die drei Produkte entlang der fallenden Diagonalen (positiv) und die drei entlang der steigenden Diagonalen (negativ). Ein Vorzeichenfehler bei negativen Einträgen ist der häufigste Fehler; deshalb jedes Produkt einzeln notieren.

Lösung zu Aufgabe 3

a) Zeile 1 hat eine Null: $2 \cdot (3 \cdot 1 - 2 \cdot 1) - 0 + 1 \cdot (1 \cdot 1 - 3 \cdot 0) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$.
b) Zeile 1 hat zwei Nullen, nur $a_{11} = 1$ trägt bei: $1 \cdot (2 \cdot 1 - 5 \cdot 3) = 2 - 15 = -13$.
c) Spalte 1 hat zwei Nullen, nur $a_{21} = 3$ trägt bei, Vorzeichen $(-1)^{2+1} = -1$:
$-3 \cdot (2 \cdot 1 - 0 \cdot 5) = -3 \cdot 2 = -6$.
Erläuterung: Bei der Laplace-Entwicklung trägt jeder Eintrag der gewählten Zeile oder Spalte mit seinem Unterdeterminanten-Wert und dem Vorzeichen des Schachbrettmusters bei. Nullen sparen Arbeit, weil ihre Summanden wegfallen.

Lösung zu Aufgabe 4

a) $2 \cdot 3 \cdot (-1) \cdot 5 = -30$.
b) Untere Dreiecksmatrix: $4 \cdot (-3) \cdot 0{,}5 = -6$.
c) $\det E_5 = 1$ und $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Erläuterung: Entwickelt man eine obere Dreiecksmatrix nach der ersten Spalte, bleibt nur der Eintrag oben links mit einer kleineren Dreiecksmatrix übrig. Wiederholt man das, erhält man das Produkt der Diagonaleinträge. Steht auf der Diagonale eine Null, ist die Determinante null und die Matrix nicht invertierbar. Die Einheitsmatrix hat stets die Determinante 1.

Lösung zu Aufgabe 5

a) $\det(2A) = 2^3 \cdot 3 = 24$ und $\det(-A) = (-1)^3 \cdot 3 = -3$ (Faktor λ^n mit $n = 3$).
b) $\det A^T = \det A = 3$ und $\det A^{-1} = \frac{1}{3}$.
c) $\det A^3 = 3^3 = 27$ (Produktsatz). Wegen $A^2 A^{-1} = A$ ist $\det(A^2 A^{-1}) = 3$.
d) Vertauschen: Faktor -1; Zeile mit 5 multiplizieren: Faktor 5. $\det B = -1 \cdot 5 \cdot 3 = -15$
.
Erläuterung: Multipliziert man eine $n \times n$-Matrix mit λ, wird jede der n Zeilen mit λ multipliziert; deshalb erscheint der Faktor λ^n. Der Produktsatz macht viele Rechnungen überflüssig.

Lösung zu Aufgabe 6

a) $\det = 4 - 2t = 0$ genau für $t = 2$.
b) $\det = t^2 - 16 = 0$ genau für $t = \pm 4$.
c) Entwicklung nach Zeile 1: $t(t^2 - 1) - 1 \cdot (t - 0) = t^3 - 2t = t(t^2 - 2)$. Nullstellen: $t = 0$ und $t = \pm\sqrt{2}$.
Erläuterung: Eine Matrix ist genau dann nicht invertierbar, wenn ihre Determinante verschwindet. Man stellt die Determinante als Polynom im Parameter auf und bestimmt dessen Nullstellen; für alle anderen Werte ist die Matrix invertierbar. Bei einem kubischen Polynom klammert man zuerst einen gemeinsamen Faktor aus.

Lösung zu Aufgabe 7

a) $\begin{pmatrix} 60 & 20 \\ 10 & 50 \end{pmatrix}$.
b) $\det = 60 \cdot 50 - 20 \cdot 10 = 2800$, Fläche $A = \frac{1}{2} \cdot 2800 = 1400\,\mathrm{m}^2$.
c) *1400\cdot180=252\,000\,€*.
d) Neue Determinante: $60 \cdot (-50) - 20 \cdot 10 = -3200$. Das Vorzeichen wechselt (andere Orientierung), die Fläche ist mit $\frac{1}{2} \cdot 3200 = 1600\,\mathrm{m}^2$ größer.
Erläuterung: Der Betrag der Determinante zweier Kantenvektoren ist die Fläche des aufgespannten Parallelogramms; das Dreieck ist halb so groß. Liegt ein Eckpunkt nicht im Ursprung, bildet man zuerst die Differenzvektoren von einem gemeinsamen Eckpunkt aus.

Lösung zu Aufgabe 8

a)  .

b) Obere Dreiecksmatrix: $\det = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, also Volumen $24\,\mathrm{nm}^3$.
c) Alle drei Vektoren haben die dritte Koordinate 0 und liegen in der x-y-Ebene. Die Matrix hat eine Nullzeile, $\det = 0$: Der Spat ist flach und hat das Volumen 0.
d) Faktor $2^3 = 8$: neues Volumen $24 \cdot 8 = 192\,\mathrm{nm}^3$.

Lösung zu Aufgabe 9

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8{,}4 \\ 8{,}4 \end{pmatrix}$.
b) $\det A = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 3 = 2 - 9 = -7 \neq 0$: eindeutig lösbar.
c) $x = \dfrac{8{,}4 \cdot 1 - 3 \cdot 8{,}4}{-7} = \dfrac{-16{,}8}{-7} = 2{,}40$, $y = \dfrac{2 \cdot 8{,}4 - 3 \cdot 8{,}4}{-7} = \dfrac{-8{,}4}{-7} = 1{,}20$.
d) Probe: $2 \cdot 2{,}40 + 3 \cdot 1{,}20 = 4{,}80 + 3{,}60 = 8{,}40$ und $3 \cdot 2{,}40 + 1{,}20 = 8{,}40$. Preis: *4\cdot2{,}40+5\cdot1{,}20=9{,}60+6{,}00=15{,}60\,€*.
Erläuterung: Bei der Cramerschen Regel ersetzt man für jede Unbekannte die zugehörige Spalte der Koeffizientenmatrix durch die rechte Seite und teilt die neue Determinante durch die alte. Die Regel ist nur anwendbar, wenn die Koeffizientendeterminante nicht null ist.

Lösung zu Aufgabe 10

a)
$\det A = 1 \cdot ((-1)(-1) - 1 \cdot 2) - 1 \cdot (2 \cdot (-1) - 1 \cdot 1) + 1 \cdot (2 \cdot 2 - (-1) \cdot 1) = (-1) + 3 + 5 = 7$
.

b) ;

;

c) $x = \frac{7}{7} = 1$, $y = \frac{14}{7} = 2$, $z = \frac{21}{7} = 3$. Probe: $1 + 2 + 3 = 6$, $2 - 2 + 3 = 3$, $1 + 4 - 3 = 2$. Alle drei Gleichungen stimmen.
Erläuterung: Für drei Unbekannte braucht man vier Determinanten. Bei größeren Systemen wird die Cramersche Regel schnell aufwendig; dann ist der Gauß-Algorithmus effizienter. Die Probe durch Einsetzen in alle drei Gleichungen ist dennoch unverzichtbar.

Lösung zu Aufgabe 11

a) $Z_2 - 2Z_1 = (0, 1, 1, 1)$, $Z_3 - Z_1 = (0, 1, 2, 3)$. Dann $Z_3 - Z_2 = (0, 0, 1, 2)$, $Z_4 - Z_2 = (0, 0, 2, 4)$ und $Z_4 - 2Z_3 = (0, 0, 0, 0)$. Eine Nullzeile: $\det = 0$.
b) $Z_2 - \frac{1}{2}Z_1 = (0, \frac{3}{2}, 1, 0)$. $Z_3 - \frac{2}{3}Z_2 = (0, 0, \frac{4}{3}, 1)$. $Z_4 - \frac{3}{4}Z_3 = (0, 0, 0, \frac{5}{4})$.

$\det = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} = 5$.
c) Nein, $\det = 0$. Das homogene System $Ax = 0$ hat dann nichttriviale Lösungen (unendlich viele), denn der Rang ist kleiner als 4.
Erläuterung: Addiert man ein Vielfaches einer Zeile zu einer anderen, bleibt die Determinante unverändert; deshalb darf man bis zur Dreiecksform eliminieren.

Lösung zu Aufgabe 12

a) $\det A = 8 - 3 = 5$, $\det B = 3 - 0 = 3$.
b) $AB = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 18 \end{pmatrix}$, $\det(AB) = 36 - 21 = 15 = 5 \cdot 3$. Der Produktsatz stimmt.
c) $BA = \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$, $\det(BA) = 96 - 81 = 15$. Die Determinanten sind gleich, aber $AB \neq BA$.
d) $A + B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$, $\det(A + B) = 21 - 9 = 12 \neq 8 = 5 + 3$. Die Determinante ist nicht additiv.
Erläuterung: Obwohl AB und BA verschiedene Matrizen sind, haben sie dieselbe Determinante, denn beide sind nach dem Produktsatz gleich $\det A \cdot \det B$. Determinanten sind Zahlen, und Zahlen dürfen vertauscht werden.

Lösung zu Aufgabe 13

a) $\det S = 6 - 0 = 6$. Die Fläche wird mit dem Faktor 6 multipliziert: $5 \cdot 4 \cdot 6 = 120$ Quadratpixel.
b) $\det R = 0 \cdot 0 - (-1) \cdot 1 = 1$. Die Drehung erhält Flächen und Orientierung.
c) $\det(SR) = 6 \cdot 1 = 6$. Kontrolle: $\det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = 0 + 6 = 6$.
d) Die Spiegelung hat $\det = -1$, die Gesamtabbildung hat $\det = -6$: gleicher Flächenfaktor 6, aber die Orientierung kehrt sich um.

Lösung zu Aufgabe 14

a) , , .

b) .

c) Die Determinante ist 0: Die drei Vektoren sind linear abhängig, die vier Punkte liegen in einer Ebene (nämlich $x + y + z = 1$).

d) : . Volumen

$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ Einheiten, also $\frac{1}{3} \cdot (100\,\mathrm{m})^3 \approx 333\,333\,\mathrm{m}^3$.
Erläuterung: Vier Punkte liegen genau dann in einer Ebene, wenn die drei

Verbindungsvektoren von einem Punkt aus linear abhängig sind, also ein Spat mit Volumen null entsteht.

Lösung zu Aufgabe 15

a) und

$(2-1)(4-1)(4-2) = 1 \cdot 3 \cdot 2 = 6$.
b) Ziehen Sie Spalte 1 von den Spalten 2 und 3 ab: Spalten $(1, a, a^2)$, $(0, b-a, b^2-a^2)$, $(0, c-a, c^2-a^2)$. Entwicklung nach Zeile 1 und Ausklammern von $(b-a)$ und $(c-a)$ liefert .

c) $V = 0$ genau dann, wenn zwei der Zahlen a, b, c gleich sind. Interpolationspunkte müssen verschiedene x-Werte haben, sonst gibt es keine eindeutige Parabel.

d) Matrix , $\det = -2$. $\det A_1 = -2 \Rightarrow \alpha = 1$; $\det A_2 = 0 \Rightarrow \beta = 0$; $\det A_3 = -2 \Rightarrow \gamma = 1$. Die Parabel ist $y = x^2 + 1$; Probe: $2, 5, 10$.

Lösung zu Aufgabe 16

a) $\det A = 10 \cdot (12 \cdot 9 - 25) - (-4) \cdot (-4 \cdot 9 - 0) + 0 = 10 \cdot 83 - 144 = 686$.

b) .

c) $I_1 = \frac{1372}{686} = 2\,\mathrm{A}$. Probe: $20 - 8 = 12$; $-8 + 24 - 10 = 6$; $-10 + 18 = 8$. Alle stimmen.
d) Bei $\det A \neq 0$ gibt es genau einen Stromverlauf für gegebene Spannungen. Bei $\det A = 0$ wäre das Netzwerk physikalisch entartet (etwa ein Kurzschluss ohne Widerstand), und es gäbe keine oder beliebig viele Lösungen.

Lösung zu Aufgabe 17

a) $E - A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}3 \\ -0{,}4 & 0{,}9 \end{pmatrix}$, $d = \begin{pmatrix} 60 \\ 30 \end{pmatrix}$ (Zeilen: Lieferung an I, an E; Spalten: Produktion I, E).
b) $\det = 0{,}8 \cdot 0{,}9 - (-0{,}3)(-0{,}4) = 0{,}72 - 0{,}12 = 0{,}60$.
c) $x_1 = \dfrac{60 \cdot 0{,}9 - (-0{,}3) \cdot 30}{0{,}6} = \dfrac{54 + 9}{0{,}6} = 105$;
$x_2 = \dfrac{0{,}8 \cdot 30 - (-0{,}4) \cdot 60}{0{,}6} = \dfrac{24 + 24}{0{,}6} = 80$.
d) Erste Zeile: $0{,}8 \cdot 105 - 0{,}3 \cdot 80 = 60$ (= 60). Zweite Zeile: $-0{,}4 \cdot 105 + 0{,}9 \cdot 80 = 30$ (= 30). Beide Nachfragen werden gedeckt.
Erläuterung: Das Leontief-Modell beschreibt, wie viel jede Branche produzieren muss, damit nach Abzug der gegenseitigen Lieferungen die Endnachfrage gedeckt ist.

Lösung zu Aufgabe 18

a) $(\det A)^2 = \det(A^2) = \det E = 1$, also $\det A = \pm 1$. $\square$
b) $\det A = \det A^T = \det(-A) = (-1)^n \det A = -\det A$, also $2\det A = 0$. $\square$
c) $(\det A)^k = \det(A^k) = \det 0 = 0$, also $\det A = 0$. $\square$
d) $\det A \cdot \det B = \det(AB) \neq 0$, also sind beide Faktoren $\neq 0$. $\square$
Erläuterung: Alle Beweise nutzen nur drei Regeln: den Produktsatz, $\det A^T = \det A$ und $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

Lösung zu Aufgabe 19

a) Haupt: $125 + 8 + 8 = 141$. Neben: $20 + 20 + 20 = 60$. $\det = 81$.
b) Addiert man Zeilen 2 und 3 zur ersten, steht in Zeile 1 dreimal $a + 2b$. Ausklammern: $(a + 2b) \cdot \det$ mit Zeile $1 = (1, 1, 1)$. Subtrahiert man danach Spalte 1 von den Spalten 2 und 3, entsteht die Dreiecksform mit Diagonale 1, $a - b$, $a - b$. Also $(a + 2b)(a - b)^2$.
c) $\det = (a - 2)^2(a + 4) = 0$ genau für $a = 2$ oder $a = -4$.
d) $(3 - 1)^3(3 + 3 \cdot 1) = 8 \cdot 6 = 48$. Direkte Rechnung: Zeilenumformung ergibt Diagonale $6, 2, 2, 2$ mit Produkt 48.

Lösung zu Aufgabe 20

a) $\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = 0$ liefert $2 - \lambda = \pm 1$, also $\lambda = 1$ oder $\lambda = 3$.
b) $(4 - \lambda)(3 - \lambda) - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$ liefert $\lambda = 2$ oder $\lambda = 5$.
c) Für A: Summe 4 = Spur, Produkt $3 = \det A = 4 - 1$. Für B: Summe 7 = Spur, Produkt $10 = \det B = 12 - 2$.
d) Für $\lambda = 0$ wird $\det(A - \lambda E) = \det A$. Also ist 0 genau dann Lösung, wenn $\det A = 0$.